

Königliches Gymnasium zu Marienwerder.

Zu der

am 25. September 1866 stattfindenden



ladet

im Namen des Lehrer-Kollegiums

ehrerbietigst ein

Dr. Theodor Breiter,
Dir. Gymn.

Inhalt.

a. Abhandlung des Prof. Dr. Karl Gützlaff: Ueber das Auflösen trigonometrischer Aufgaben.

b. Schulnachrichten vom Direktor.

Marienwerder, 1866.
Gedruckt bei Friedr. Aug. Harich.



Ueber das Auflösen trigonometrischer Aufgaben

von

Professor Dr. Gützlaff.

§ 1.

Alle mathematischen Untersuchungen über den Raum beziehen sich auf seine Gestalt, Grösse und Lage und darauf auch alle Raumaufgaben, welche in der Mathematik gelöst werden.

Diese Aufgaben sind doppelter Art. Entweder sind Raumgebilde vorgelegt, durch deren Verbindung neue Raumgestalten geschaffen werden sollen, oder es sind die gegebenen Grössen benannte Zahlenwerthe, welche nach den Raummassen festgestellt sind, und es wird verlangt, dieselben in Gleichungen nach den in der Raumwissenschaft und Zahlenlehre geltenden Gesetzen mit den ebenfalls in Zahlenwerthen gesuchten Grössen so zusammen zu stellen, dass aus diesen das Gesuchte durch das Gegebene in algebraischen Ausdrücken bestimmt werden kann.

Diese zweite Art der Raumaufgaben zerfällt wieder in rein algebraische und trigonometrische.

Rein algebraisch ist die Aufgabe, wenn sowohl das Gegebene wie auch das Gesuchte nicht Winkel enthält, welche durch ihre goniometrischen Funktionen mit den übrigen Raumgrössen verbunden werden müssen, und es auch nicht nöthig ist, um Gleichungen zwischen den gegebenen und gesuchten Grössen bilden zu können, Winkel durch ihre goniometrischen Functionen einzuführen und später zu eliminiren.

Trigonometrisch aber ist eine Aufgabe, wenn in derselben entweder unter den Daten Winkel, nach den Winkelmassen bestimmt, vorkommen oder gesucht werden oder Winkel mit den gegebenen und gesuchten Grössen durch ihre goniometrischen Functionen in Verbindung gebracht werden müssen, um Gleichungen zu erhalten, aus denen das Geforderte durch das Gegebene gefunden werden kann.

Während in der Constructionsaufgabe die Darstellung des gesuchten Raumgebildes die Hauptsache ist, und Analysis, Synthesis und Beweis nur darthun, dass man nach sorgfältigem Durchdenken der Aufgabe Mittel und Wege gefunden hat, die Forderungen derselben streng

zu erfüllen, fordern die zweite und dritte Art der Aufgaben genaue Rechnung nach den Gesetzen der Arithmetik, Goniometrie und Trigonometrie.

§ 2.

Wie gering auch der Umfang des Wissens ist, welches die Schüler unserer Gymnasien erwerben, so muss ihnen doch, soweit es möglich ist, klar gemacht werden, dass die Mathematik eine angewandte Wissenschaft ist, und dass sie deshalb lernen müssen, mit vollem Bewusstsein des Ziels, das erreicht werden soll, die Mittel wählen, durch welche sie dieses am Besten gewinnen. Vorzüglich müssen sie frühzeitig einsehen, dass derjenige am Besten arbeitet, der in der möglichst kürzesten Zeit die an ihn gestellten Forderungen gut zu erfüllen im Stande ist.

§ 3.

Im Interesse des mathematischen Unterrichts sind die folgenden Auflösungen trigonometrischer Aufgaben über das Dreieck ausgearbeitet worden. Es kommt bei jeder Auflösung darauf an, entweder zwischen den Daten unmittelbar oder mit Einführung neuer vermittelnder Grössen, welche später wieder eliminirt werden, Gleichungen zu bilden, aus denen diejenigen Grössen bestimmt werden, durch deren Kenntniss in Verbindung mit den gegebenen Grössen es möglich wird, alle Seiten und Winkel des Dreiecks zu finden. Ueberflüssig aber ist es, das Gesuchte durch eine Gleichung auszudrücken, welche nur das Gegebene enthält. Dagegen ist es von besonderer Wichtigkeit, die zu berechnenden Resultate wo möglich in logarithmischer Form aufzustellen, damit dieselben in der kürzesten Zeit und mit dem geringsten Kraftaufwande gewonnen werden können.

§ 4.

Es sei ABC (Figur 1) das zu berechnende Dreieck. Fällt man das Loth CD von C auf AB so ist dies eine Höhe desselben und AD so wie BD sind die Höhenabschnitte. Sind ferner EX und GY Lothe in den Mittelpunkten der Seiten AB und AC, welche sich in M schneiden, so ist M das Centrum des um das Dreieck beschriebenen Kreises, und es sind AM, BM und CM seine Radien. Sind endlich AZ und BU die Halbirungslinien der Winkel BAC und ABC, so ist ihr Durchschnittspunkt n der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises und die von ihm auf AB, AC und BC gefällten Lothe ne, nf und ng sind seine Radien. Wenn nun zur Berechnung der Seiten und Winkel des Dreiecks

1. $\angle ABC + \angle BAC$ oder $B + A = \alpha$,
2. $\angle ABC - \angle BAC$ oder $B - A = \delta$,
3. AB oder $AD + BD = c$,
4. $AD - BD = m$,
5. $AC + BC = s$,
6. $AC - BC = d$,
7. $CD = h$,
8. $AM = BM = CM = R$,
9. $ne = nf = ng = r$,
10. der Umfang des Dreiecks $AB + AC + BC = u$ und
11. der Flächeninhalt des Dreiecks oder $\Delta ABC = F$

gegeben sind, so lassen sich durch die Ternen aus diesen 11 Elementen $\frac{11.10.9}{1.2.3}$ oder 165 Auf-

gaben über das Dreieck bilden. Von diesen sind alle diejenigen in Betracht genommen, welche nicht auf Gleichungen von einem höhern als dem 2. Grade führen, doch ist von den in der Auflösung ähnlichen Aufgaben immer nur eine einzige gelöst. Schliesslich sind noch einige Aufgaben hinzugefügt, die interessante Auflösungen darbieten.

§ 5.

Zur Abkürzung sind in den folgenden Paragraphen die in der Auflösung ähnlichen Aufgaben zusammengestellt und diese selbst nicht in Worten, sondern nur durch die Data nach den für sie eingeführten Symbolen ausgedrückt.

§ 6. $\alpha\,\delta\,c$, $\alpha\,\delta\,m$, $\alpha\,c\,m$ und $\delta\,c\,m$.

Auflösung. Da $B + A = \alpha$ und $B - A = \delta$, so ist $B = \frac{\alpha + \delta}{2}$, $A = \frac{\alpha - \delta}{2}$ und $C = 180^0 - \alpha$, ferner ist

$$A\,D + B\,D = c = h\,(Cotg\,A + Cotg\,B) = \frac{h\,Sin\,(B + A)}{Sin\,B\,Sin\,A}$$

$$A\,D - B\,E = m = h\,(Cotg\,A - Cotg\,B) = \frac{h\,Sin\,(B - A)}{Sin\,B\,Sin\,A}$$

$$\text{also } \frac{c}{m} = \frac{Sin\,(B + A)}{Sin\,B - A} = \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\delta}$$

$$\text{und } A\,D = \frac{c + m}{2} \text{ sowie } B\,D = \frac{c - m}{2},$$

folglich lassen sich mit Hülfe der Gleichung für $\frac{c}{m}$ alle 4 Aufgaben auf ähnliche Weise lösen, indem man die Winkel A, B, C und $A\,D$ so wie $B\,D$ bestimmt, wodurch man dann

$$A\,C = \frac{A\,D}{Sin\,A} \text{ und } B\,C = \frac{B\,D}{Sin\,B}$$

erhält.

§ 7. $\alpha\,\delta\,s$, $\alpha\,\delta\,d$, $\alpha\,s\,d$, $\delta\,s\,d$.

Auflösung. Nach der Trigonometrie ist

$$(A\,C + B\,C) : (A\,C - B\,C) = Tg\,\frac{B + A}{2} : Tg\,\frac{B - A}{2}$$

$$\text{d. h. } s : d = Tg\,\frac{\alpha}{2} : Tg\,\frac{\delta}{2}$$

und da $A\,C = \frac{s + d}{2}$, $B\,C = \frac{s - d}{2}$ und $A\,B : A\,C = Sin\,C : Sin\,B$ ist,

so lassen sich in allen 4 Aufgaben aus den Daten die Seiten und Winkel des Dreiecks $A\,B\,C$ finden.

§ 8. $\alpha\,\delta\,h$ giebt die Winkel A, B, C, und $A\,B = \frac{h\,Sin\,(B + A)}{Sin\,B\,Sin\,A}$, $A\,C = \frac{h}{Sin\,A}$ und $B\,C = \frac{h}{Sin\,B}$

§ 9. $\alpha\,\delta\,R$ giebt A, B, C und $A\,B = 2\,R\,Sin\,C$, $A\,C = 2\,R\,Sin\,B$ und $B\,C = 2\,R\,Sin\,A$.

§ 10. $\alpha\,\delta\,r$ giebt A, B, C und es ist $A\,B = r\left(Cotg\,\frac{A}{2} + Cotg\,\frac{B}{2}\right) = r\,\frac{Sin\,\frac{B + A}{2}}{Sin\,\frac{B}{2}\;Sin\,\frac{A}{2}}$,

$$A\,C = \frac{r\,Sin\,\frac{A + B}{2}}{Sin\,\frac{A}{2}\;Sin\,\frac{B}{2}} \text{ etc.}$$

§ 11. $\alpha\,\delta\,u$ giebt A, B, C; ferner ist $u = h\left(Cotg\frac{A}{2} + Cotg\frac{B}{2}\right) = \frac{h\,Sin\,\frac{B+A}{2}}{Sin\,\frac{B}{2}\,Sin\,\frac{A}{2}}$, woraus sich h berechnen lässt, folglich können durch h und die Winkel auch die Seiten des Dreiecks bestimmt werden.

§ 12. $\alpha\,\delta\,F$ giebt A, B, C, und aus $F = \frac{h^2\,Sin\,(B+A)}{2\,Sin\,B\,Sin\,A}$ auch den Winkel h, also kann man nun auch AB, AC und BC finden.

§ 13. $\alpha\,c\,s$, $\alpha\,c\,d$, $\alpha\,m\,s$, $\alpha\,m\,d$, $\delta\,c\,s$, $\delta\,m\,d$, $\delta\,m\,s$ und $\delta\,m\,d$
$\alpha\,s\,u = \alpha\,c\,s$, $\delta\,s\,u = \delta\,c\,s$

haben ähnliche Auflösungen.

Für $\alpha\,c\,s$ ist $c = h\,(Cotg\,A + Cotg\,B) = h\,\frac{Sin\,(B+A)}{Sin\,B\,.\,Sin\,A}$

$$s = h\left(\frac{1}{Sin\,A} + \frac{1}{Sin\,B}\right) = h\,\frac{Sin\,B + Sin\,A}{Sin\,B\,.\,Sin\,A}$$

$$\frac{s}{c} = \frac{Sin\,B + Sin\,A}{Sin\,(B+A)} = \frac{2\,Sin\,\frac{B+A}{2}\,.\,Cos\,\frac{B-A}{2}}{2\,Sin\,\frac{B+A}{2}\,.\,Cos\,\frac{B+A}{2}} = \frac{Cos\,\frac{\delta}{2}}{Cos\,\frac{\alpha}{2}}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich $\frac{\delta}{2}$ bestimmen und es ist dann $B = \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2}$, $A = \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2}$ und $C = 180^0 - \alpha$; ferner ist $AC : c' = Sin\,B : Sin\,C$, woraus man AC findet, $BC = s - AC$.

§ 14. $\alpha\,c\,h$, $\alpha\,m\,h$, $\delta\,c\,h$, $\delta\,m\,h$,
ferner $\alpha\,c\,F = \alpha\,c\,h$, $\delta\,c\,F = \delta\,c\,h$

Auflösung. Für $\alpha\,c\,h$ ist $c = \frac{h\,Sin\,(B+A)}{Sin\,B\;Sin\,A} = \frac{2\,h\,Sin\,(B+A)}{Cos\,(B-A) - Cos\,(B+A)} = \frac{2\,h\,Sin\,\alpha}{Cos\,\delta - Cos\,\alpha}$

also
$$Cos\,\delta = Cos\,\alpha + \frac{2\,h}{c}\,Sin\,\alpha.$$

Setzt man jetzt $\frac{2\,h}{c} = Tg\,\varphi$, wodurch man φ erhält, so ist

$$Cos\,\delta = Cos\,\alpha + Tg\,\varphi\,Sin\,\alpha = Cos\,\alpha + \frac{Sin\,\varphi\,Sin\,\alpha}{Cos\,\varphi} = \frac{Cos\,\alpha\,Cos\,\varphi + Sin\,\varphi\,Sin\,\alpha}{Cos\,\varphi}$$

d. h. $Cos\,\delta = \frac{Cos\,(\alpha - \varphi)}{Cos\,\varphi}$

Hieraus lässt sich δ berechnen. Dann sind $B = \frac{\alpha + \delta}{2}$, $A = \frac{\alpha - \delta}{2}$, $C = 180^0 - \alpha$, $AC = \frac{h}{Sin\,A}$, $BC = \frac{h}{Sin\,B}$.

§ 15. $\alpha\,c\,r$, $\delta\,c\,r$.

Auflösung. Für $\alpha\,c\,r$ ist $c = \frac{r\,.\,Sin\,\frac{B+A}{2}}{Sin\,\frac{B}{2}\,Sin\,\frac{A}{2}} = \frac{2\,r\,Sin\,\frac{B+A}{2}}{Cos\,\frac{B-A}{2} - Cos\,\frac{B+A}{2}} = \frac{2\,r\,Sin\,\frac{\alpha}{2}}{Cos\,\frac{\delta}{2} - Cos\,\frac{\alpha}{2}}$

also $Cos\,\frac{\delta}{2} = Cos\,\frac{\alpha}{2} + \frac{2\,r}{c}\,Sin\,\frac{\delta}{2}$.

Setzt man jetzt $\frac{2\,r}{c} = Tg\,\varphi$, so ist φ bekannt

$Cos\,\frac{\delta}{2} = \frac{Cos\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right)}{Cos\,\varphi}$ und man kann $\frac{\delta}{2}$ finden. Aus $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\delta}{2}$ erhält man die Winkel und durch sie und r die Seiten AC und BC.

§ 16. $a c u$, $\delta c u$.

Auflösung. $a c u$, $c = \frac{h \, Sin\,(B + A)}{Sin\, B \; Sin\, A}$, $u = \frac{h \, Sin \frac{B + A}{2}}{Sin \frac{B}{2} \; Sin \frac{A}{2}}$

$$\frac{u}{c} = \frac{Sin \frac{A + B}{2} . \, 4 \, Sin \frac{B}{2} . \, Cos \frac{B}{2} \; Sin \frac{A}{2} \; Cos \frac{A}{2}}{2 \, Sin \frac{B + A}{2} \, Cos \frac{B + A}{2} . \; Sin \frac{B}{2} \; Sin \frac{A}{2}} = \frac{2 \, Cos \frac{B}{2} \; Cos \frac{A}{2}}{Cos \frac{B + A}{2}}$$

$$\frac{u}{c} = \frac{Cos \frac{B - A}{2} + Cos \frac{B + A}{2}}{Cos \frac{B + A}{2}} = \frac{Cos \frac{\delta}{2} + Cos \frac{\alpha}{2}}{Cos \frac{\alpha}{2}}$$

$\frac{u - c}{c} \; Cos \frac{\alpha}{2} = Cos \frac{\delta}{2}$, woraus sich $\frac{\delta}{2}$ bestimmen lässt.

Durch α und δ hat man die Winkel und durch sie und c die Seiten $A\,C$ und $B\,C$.

§ 17. $a s h$, $a d h$, $\delta s h$, $\delta d h$

haben ähnliche Auflösungen. Für $a s h$ ist

$$s = h \, \frac{Sin\, B + Sin\, A}{Sin\, B \; Sin\, B} = \frac{2 \, h \, Sin \frac{B + A}{2} \, Cos \frac{B - A}{2}}{Cos \frac{B - A}{2}^2 - Cos \frac{B - A}{2}^2} = \frac{2 \, h \, Sin \frac{\alpha}{2} \, Cos \frac{\delta}{2}}{Cos \frac{\delta}{2}^2 - Cos \frac{\alpha}{2}^2}$$

$$Cos \frac{\delta}{2}^2 - Cos \frac{\alpha}{2}^2 = \frac{2 \, h}{s} \, Sin \frac{\alpha}{2} \, Cos \frac{\delta}{2}$$

$$Cos \frac{\delta}{2}^2 - \frac{2 \, h}{s} \, Sin \frac{\alpha}{2} \, Cos \frac{\delta}{2} = Cos \frac{\alpha}{2}^2$$

$$Cos \frac{\delta}{2} = \frac{h}{s} \, Sin \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{s^2} \, Sin \frac{\alpha}{2}^2 + Cos \frac{\alpha}{2}^2}$$

$$= \frac{h}{s} \, Sin \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{s^2} \, Sin \frac{\alpha}{2}^2 \left\{ 1 + \frac{s^2}{h^2} \, Cotg \frac{\alpha}{2}^2 \right\}}$$

$$= \frac{h}{s} \, Sin \frac{\alpha}{2} \pm \frac{h}{s} \, Sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \frac{s^2}{h^2} \, Cotg \frac{\alpha}{2}^2} = \frac{h}{s} \, Sin \frac{\alpha}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{s^2}{h^2} \, Cotg \frac{\alpha}{2}^2} \right\}$$

Da $\delta < 180^0$ ist, so muss $\frac{\delta}{2} < 90^0$ und deshalb $Cos \frac{\delta}{2}$ positiv sein. Nun sind h und s als Längenwerthe positiv und $Sin \frac{\alpha}{2}$ gleichfalls, weil $\alpha < 180^0$ und $\frac{\alpha}{2} < 90^0$ ist, folglich ist $\frac{h}{s} \, Sin \frac{\alpha}{2}$ positiv. Ebenso ist unter dem Wurzelzeichen $\frac{s}{h} \, Cotg \frac{\alpha}{2}$ reell und daher $\frac{s^2}{h^2} \, Cotg \frac{\alpha}{2}^2$ positiv, also $\sqrt{1 + \frac{s^2}{h^2} \, Cotg \frac{\alpha}{2}^2} > 1$; es wird daher die ganze rechte Seite der Gleichung nur positiv, wenn das obere Zeichen der Wurzel berücksichtigt wird. Demnach ist

$$Cos \frac{\delta}{2} = \frac{h}{s} \, Sin \frac{\alpha}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{s^2}{h^2} \, Cotg \frac{\alpha}{2}^2} \right\}$$

Setzt man jetzt $\frac{s}{h} \, Cotg \frac{\alpha}{2} = Tg \, . \, \varphi$ wodurch φ bekannt wird,

oder auch $\frac{s \, Cos \frac{\alpha}{2}}{h \, Sin \frac{\alpha}{2}} = Tg \, \varphi$, so ist $\frac{h}{s} \, Sin \frac{\alpha}{2} = \frac{Cos \frac{\alpha}{2}}{Tg \, \varphi}$ und

$$Cos\frac{\delta}{2} = \frac{Cos\frac{\alpha}{2}}{Tg\,\varphi}\left\{1 + \sqrt{1 + Tg\,\varphi^2}\right\} = \frac{Cos\frac{\alpha}{2}}{Tg\,\varphi}\left\{1 + Sec\,\varphi\right\} = \frac{Cos\frac{\alpha}{2}}{Tg\,\varphi}\left\{1 + \frac{1}{Cos\,\varphi}\right\}$$

$$= \frac{Cos\frac{\alpha}{2}}{Tg\,\varphi}\,\frac{Cos\,\varphi + 1}{Cos\,\varphi} = Cos\frac{\alpha}{2}\,\frac{Cos\,\varphi + 1}{Sin\,\varphi}$$

$$Cos\frac{\delta}{2} = Cos\frac{\alpha}{2}\,.\,Cotg\frac{\varphi}{2}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich $\frac{\delta}{2}$ bestimmen und dann ist

$$B = \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2},\; A = \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2},\; C = 180^0 - \alpha$$

$A\,C = \frac{h}{Sin\,A}$, $B\,C = \frac{h}{Sin\,B}$ und aus $A\,B : A\,C = Sin\,C : Sin\,B$ findet man $A\,B$.

§ 18. $\alpha\,s\,R,\ \alpha\,d\,R,\ \delta\,s\,R,\ \delta\,d\,R$

haben übereinstimmende Auflösungen.

Für $a\,s\,R$ ist

$$A\,C = 2\,R\,Sin\,B$$
$$B\,C = 2\,R\,Sin\,A$$

also $A\,C + B\,C$ oder $s = 2\,R\,(Sin\,B + Sin\,A) = 4\,R\,Sin\frac{A+B}{2}\,Cos\frac{A-B}{2}$

$$= 4\,R\,Sin\frac{\alpha}{2}\,Cos\frac{\delta}{2}$$

folglich $Cos\frac{\delta}{2} = \frac{s}{4\,R\,Sin\frac{\alpha}{2}}$

Hieraus lässt sich $\frac{\delta}{2}$ berechnen, wodurch A, B, C bestimmbar sind. $A\,C$ und $B\,C$ findet man durch die obigen Gleichungen und es ist $A\,B = 2\,R\,Sin\,C$.

§ 19. $\alpha\,r\,s$.

Auflösung. Es ist $s = A\,B + A\,C = r\left(Cotg\frac{A}{2} + Cotg\frac{B}{2} + 2\,Cotg\frac{C}{2}\right)$

$$\frac{s}{r} = \frac{Sin\frac{B+A}{2}}{Sin\frac{B}{2}\,Sin\frac{A}{2}} + \frac{2\,Sin\frac{B+A}{2}}{Cos\frac{B+A}{2}} = \frac{Sin\frac{A+B}{2}}{Cos\frac{B+A}{2}}\;\frac{Cos\frac{B+A}{2} + 2\,Sin\frac{B}{2}\,Sin\frac{A}{2}}{Sin\frac{B}{2}\,Sin\frac{A}{2}}$$

$$\frac{s}{r} = \frac{Sin\frac{B+A}{2}}{Cos\frac{B+A}{2}}\,.\,\frac{2\,.\,Cos\frac{B-A}{2}}{Cos\frac{B-A}{2} - Cos\frac{B+A}{2}} = 2\,Tg\frac{\alpha}{2}\,.\,\frac{Cos\frac{\delta}{2}}{Cos\frac{\delta}{2} - Cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{s}{2\,r\,Tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{Cos\frac{\delta}{2}}{Cos\frac{\delta}{2} - Cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{s}{s - 2\,r\,Tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{Cos\frac{\delta}{2}}{Cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{Cos\frac{\alpha}{2}}{1 - \frac{2\,r}{s}\,Tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{Cos\frac{\alpha^2}{2}}{Cos\frac{\alpha}{2} - \frac{2\,r}{s}\,Sin\frac{\alpha}{2}} = Cos\frac{\delta}{2}$$

Setzt man jetzt $\frac{2r}{s} = Tg\,\varphi$, wodurch sich φ bestimmen lässt,

$$\text{so ist } \frac{Cos\,\frac{\alpha}{2}^{2}\,Cos\,\varphi}{Cos\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)} = Cos\,\frac{\delta}{2},$$ und man kann auch $\frac{\delta}{2}$ berechnen.

Aus α und δ findet man den Winkel A, B, C und durch sie und r die Seiten des Dreiecks.

§ 20. *a d r und δ d r.*

Auflösung. Es ist $AC = r\left(Cotg\,\frac{A}{2} + Cotg\,\frac{C}{2}\right)$

$$BC = r\left(Cotg\,\frac{B}{2} + Cotg\,\frac{C}{2}\right)$$

$$\text{also } AC - BC \text{ oder } d = r\left(Cotg\,\frac{A}{2} - Cotg\,\frac{B}{2}\right) = \frac{r\,Sin\,\frac{B-A}{2}}{Sin\,\frac{B}{2}\;Sin\,\frac{A}{2}} = \frac{2\,r\,Sin\,\frac{B-A}{2}}{Cos\,\frac{B-A}{2} - Cos\,\frac{B+A}{2}}$$

$$\text{und } \frac{d}{2r} = \frac{Sin\,\frac{\delta}{2}}{Cos\,\frac{\delta}{2} - Cos\,\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{also } Cos\,\frac{\delta}{2} - Cos\,\frac{\alpha}{2} = \frac{2r}{d}\,Sin\,\frac{\delta}{2}$$

$$Cos\,\frac{\delta}{2} - \frac{2r}{2}\,Sin\,\frac{\delta}{2} = Cos\,\frac{\alpha}{2}$$

Setzt man $\frac{2r}{d} = Tg\,\varphi$, wodurch φ bekannt wird,

$$\text{so ist } Cos\left(\frac{\delta}{2} + \varphi\right) = Cos\,\frac{\alpha}{2}\,.\,Cos\,\varphi$$

Hieraus lässt sich $\frac{\delta}{2}$ bestimmen, und es können Winkel und Seiten des Dreiecks gefunden werden.

§ 21. *a d u.*

Auflösung. Es ist $u = h\left(Cotg\,\frac{A}{2} + Cotg\,\frac{B}{2}\right) = \frac{h\,Sin\,\frac{B+A}{2}}{Sin\,\frac{B}{2}\;Sin\,\frac{A}{2}}$

$$d = h\left(\frac{1}{Sin\,A} + \frac{1}{Sin\,B}\right) = h\,\frac{Sin\,B - Sin\,A}{Sin\,B\;Sin\,A} = \frac{2\,h\,Sin\,\frac{B-A}{2}\,Cos\,\frac{B+A}{2}}{4\,Sin\,\frac{B}{2}\,Cos\,\frac{B}{2}\,Sin\,\frac{A}{2}\,Cos\,\frac{A}{2}}$$

$$\frac{u}{d} = \frac{Sin\,\frac{B+A}{2}\,.\,2\,Cos\,\frac{B}{2}\,Cos\,\frac{A}{2}}{Sin\,\frac{B-A}{2}\,.\,Cos\,\frac{B+A}{2}} = Tg\,\frac{B+A}{2}\,\frac{Cos\,\frac{B-A}{2} + Cos\,\frac{B+A}{2}}{Sin\,\frac{B-A}{2}}$$

$$\text{d. h. } \frac{u}{d} = Tg\,\frac{\alpha}{d}\,.\,\frac{Cos\,\frac{\delta}{2} + Cos\,\frac{\alpha}{2}}{Sin\,\frac{\delta}{2}}$$

$$Sin\,\frac{\delta}{2} = \frac{d}{u}\,Tg\,\frac{\alpha}{2}\,Cos\,\frac{\delta}{2} + \frac{d}{u}\,Sin\,\frac{\alpha}{2}$$

$$Sin\,\frac{\delta}{2} - \frac{d}{u}\,Tg\,\frac{\alpha}{2}\,Cos\,\frac{\delta}{2} = \frac{d}{u}\,Sin\,\frac{\alpha}{2}$$

Setzt man $\frac{d}{u}\, Tg\, \frac{\alpha}{2} = Tg\, \varphi$, wodurch φ bekannt und

$\frac{d}{u}\, Sin\, \frac{\alpha}{2} = Tg\, \varphi \,.\, Cos\, \frac{\alpha}{2}$ wird, so ist

$$Sin\, \frac{\delta}{2} - Tg\, \varphi\, Cos\, \frac{\alpha}{2} = Tg\, \varphi\, Cos\, \frac{\alpha}{2},$$

also $\frac{Sin\left(\frac{\delta}{2} - \varphi\right)}{Cos\, \varphi} = Tg\, \varphi\, Cos\, \frac{\alpha}{2}$ und

$$Sin\left(\frac{\delta}{2} - \varphi\right) = Sin\, \varphi\, Cos\, \frac{\alpha}{2}$$

Hieraus findet man $\frac{\delta}{2}$, und es lassen sich dann A, B, C bestimmen. Aus der Gleichung für u berechnet man h und durch h und die Winkel die Seiten.

§ 22. $\alpha\, s\, F$, $\alpha\, d\, F$.

Auflösung für $\alpha\, s\, F$.

Es ist $s = h\, \frac{Sin\, B + Sin\, A}{Sin\, B\;\; Sin\, A}$

$$2\, F = h^2\, \frac{Sin\,(B + A)}{Sin\, B\;\; Sin\, A}$$

$$\text{also}\; \frac{s^2}{2\, F} = \frac{(Sin\, B + Sin\, A)^2}{Sin\,(B + A)\, Sin\, B\, Sin\, A} = \frac{4\, Sin\, \frac{B + A^2}{2}\, Cos\, \frac{B - A^2}{2}}{2\, Sin\, \frac{B + A}{2}\, Cos\, \frac{B + A}{2} \left\{ Cos\, \frac{B - A^2}{2} - Cos\, \frac{B + A^2}{2} \right\}}$$

$$\frac{s^2}{4\, F} = Tg\, \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{Cos\, \frac{\delta^2}{2}}{Cos\, \frac{\delta^2}{2} - Cos\, \frac{\alpha^2}{2}}$$

$$\frac{s^2}{4\, F\, Tg\, \frac{\alpha}{2}} = \frac{Cos\, \frac{\delta^2}{2}}{Cos\, \frac{\delta^2}{2} - Cos\, \frac{\alpha^2}{2}}$$

$$\frac{s^2}{s^2 - 4\, F\, Tg\, \frac{\alpha}{2}} = \frac{Cos\, \frac{\delta^2}{2}}{Cos\, \frac{\alpha^2}{2}} \;\text{folglich}\; \frac{1}{1 - \frac{4\, F}{s^2}\, Tg\, \frac{\alpha}{2}} = \frac{Cos\, \frac{\delta^2}{2}}{Cos\, \frac{\alpha^2}{2}}$$

Da $\frac{\alpha}{2} < 90^0$ ist, so muss $\frac{4\, F}{s^2}\, Tg\, \frac{\alpha}{2}$ positiv sein, und da $\frac{Cos\, \frac{\delta^2}{2}}{Cos\, \frac{\alpha^2}{2}}$ als Quadrat reeller Grössen gleichfalls positiv ist, so folgt daraus, dass die ganze linke Seite der Gleichung ebenfalls positiv und $\frac{4\, F}{s^2}\, Tg \frac{\alpha}{2} < 1$ sein muss. Setzt man jetzt $\frac{2}{s} \sqrt{F \,.\, Tg\, \frac{\alpha}{2}} = Sin\, \varphi$, so wird φ bekannt und es ist $\frac{Cos\, \frac{\delta^2}{2}}{Cos\, \frac{\alpha^2}{2}} = \frac{1}{1 - Sin\, \varphi^2} = \frac{1}{Cos\, \varphi^2}$

$$Cos\, \frac{\delta}{2} = + \frac{Cos\, \frac{\alpha}{2}}{Cos\, \varphi} \;\text{weil}\; \frac{\delta}{2} < 90^0 \;\text{ist.}$$

Aus dieser Gleichung findet man $\frac{\delta}{2}$ und folglich die Winkel A, B, C, welche in Verbindung mit h, das man aus der Gleichung für s bestimmt, die Seiten $A\, B$, $A\, C$ und $B\, C$ geben.

§ 23. $\alpha h R$, $\delta h R$ und $\alpha R F = \alpha h R$, da $h = \frac{F}{2 R \, Sin\, \alpha}$ ist.

Auflösung für $\alpha h R$. Es ist $A B = \frac{h \, Sin\,(B + A)}{Sin\, B \;\; Sin\, A} = 2 R \, Sin\,(B + A)$ also

$$Sin\, B \;\; Sin\, A = \frac{1}{2}\left\{Cos\,(B - A) - Cos\,(B + A)\right\} = \frac{h}{2 R}$$

$$\text{folglich } Cos\, \delta - Cos\, \alpha = \frac{h}{R}$$

$$Cos\, \delta = \frac{h}{R} + Cos\, \alpha, \text{ oder auch } Cos\, \delta = \frac{h}{R}\left(1 + \frac{R}{h} \cdot Cos\, \alpha\right)$$

Setzt man $\frac{R}{h}\, Cos\, \alpha = Tg\, \varphi$, wodurch φ bekannt wird

$$\text{so ist } Cos\, \delta = \frac{h}{R}\,(1 + Tg\, \varphi) = \frac{h}{R} \cdot \frac{Cos\, \varphi + Sin\, \varphi}{Cos\, \varphi} = \frac{h}{R} \cdot \frac{Sin\,(90^0 - \varphi) + Sin\, \varphi}{Cos\, \varphi}$$

$$Cos\, \delta = \frac{2 h}{R} \cdot Sin\, 45^0 \cdot \frac{Cos\,(45^0 - \varphi)}{Cos\, \varphi} = \frac{h}{R} \sqrt{2}\, \frac{Cos\,(45^0 - \varphi)}{Cos\, \varphi}$$

Aus dieser Gleichung wird δ bestimmt und nun lassen sich auch die Winkel und Seiten des Dreiecks $A B C$ finden.

§ 24. $\alpha h r$, $\delta h r$.

Auflösung. Es ist für $a h r$

$$A B = h\,(Cotg\, A + Cotg\, B) = h\, \frac{Sin\,(B + A)}{Sin\, B \;\; Sin\, A} \text{ und}$$

$$A B = r\left(Cotg\, \frac{A}{2} + Cotg\, \frac{B}{2}\right) = r\, \frac{Sin\, \frac{B + A}{2}}{Sin\, \frac{B}{2}\; Sin\, \frac{A}{2}}$$

also ist

$$\frac{r}{h} = \frac{Sin\,(B + A)\, Sin\, \frac{B}{2}\, Sin\, \frac{A}{2}}{Sin\, \frac{B + A}{2}\, Sin\, B \;\; Sin\, A} = \frac{2\, Sin\, \frac{B + A}{2}\, Cos\, \frac{B + A}{2}\, Sin\, \frac{B}{2}\, Sin\, \frac{A}{2}}{4\, Sin\, \frac{B + A}{2}\, Sin\, \frac{B}{2}\, Cos\, \frac{B}{2}\, Sin\, \frac{A}{2}\, Cos\, \frac{A}{2}} = \frac{Cos\, \frac{B + A}{2}}{2\, Cos\, \frac{B}{2}\;\; Cos\, \frac{A}{2}}$$

$$\frac{r}{h} = \frac{Cos\, \frac{\alpha}{2}}{Cos\, \frac{\delta}{2} + Cos\, \frac{\alpha}{2}}$$

und $Cos\, \frac{\delta}{2} = \frac{h - r}{r}\, Cos\, \frac{\alpha}{2}$, woraus sich $\frac{\delta}{2}$ berechnen lässt.

Aus $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\delta}{2}$ und h findet man Seiten und Winkel des Dreiecks $A B C$.

§ 25. $\alpha R r$, $\delta R r$.

Auflösung für $\alpha R r$.

$$A B = 2 R\, Sin\,(B + A = 4 R\, Sin\, \frac{B + A}{2}\, Cos\, \frac{B + A}{2}$$

$$A B = r\, \frac{Sin\, \frac{B + A}{2}}{Sin\, \frac{B}{2}\;\; Sin\, \frac{A}{2}} = \frac{2\, r\, Sin\, \frac{B + A}{2}}{Cos\, \frac{B - A}{2} - Cos\, \frac{B + A}{2}}$$

$$\frac{r}{2 R} = Cos\, \frac{B + A}{2}\left(Cos\, \frac{B - A}{2} - Cos\, \frac{B + A}{2}\right) = Cos\, \frac{\alpha}{2}\left(Cos\, \frac{\delta}{2} - Cos\, \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{also } Cos\, \frac{\delta}{2} = Cos\, \frac{\alpha}{2} + \frac{r}{2 R\, Cos\, \frac{\alpha}{2}} = Cos\, \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{r}{2\, R\, Cos\, \frac{\alpha}{2}^2}\right)$$

Setzt man $\frac{1}{Cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{r}{2R}} = Tg\,\varphi$ wodurch φ berechnet werden kann,

und $Cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\frac{r}{2R}}}{Tg\,\varphi}$, so ist

$$Cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r}{2R}} \cdot \frac{1+Tg\,\varphi^2}{Tg\,\varphi} = 2\sqrt{\frac{r}{2R}} \cdot Cosec\,2\varphi.$$

§ 26. $\alpha r u$, $\alpha r F = \alpha r u$, da $\frac{u r}{2} = F$, ebenso $\alpha u F = \alpha r u$.

Auflösung für $\alpha r u$. Es ist

$$u = 2r\left(Cotg\frac{A}{2} + Cotg\frac{B}{2} + Cotg\frac{C}{2}\right) = 2r\left(\frac{Sin\frac{B+A}{2}}{Sin\frac{B}{2}\,Sin\frac{A}{2}} + Tg\frac{B+A}{2}\right)$$

$$\frac{u}{2r} = Sin\frac{B+A}{2}\left(\frac{1}{Sin\frac{A}{2}\,Sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{Cos\frac{B+A}{2}}\right) = Tg\frac{B+A}{2}\,\frac{Cos\frac{B}{2}\,.\,Cos\frac{A}{2}}{Sin\frac{B}{2}\,.\,Sin\frac{A}{2}}$$

$$\frac{u}{2r} = Tg\,\frac{B+A}{2}\,\frac{Cos\frac{B-A}{2} + Cos\frac{B+A}{2}}{Cos\frac{B-A}{2} - Cos\frac{B+A}{2}} = Tg\frac{\alpha}{2}\,\frac{Cos\frac{\delta}{2} + Cos\frac{\alpha}{2}}{Cos\frac{\delta}{2} - Cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{u}{2r\,Tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{Cos\frac{\delta}{2} + Cos\frac{\alpha}{2}}{Cos\frac{\delta}{2} - Cos\frac{\alpha}{2}} \text{ also } \frac{u + r\,2\,Tg\frac{\alpha}{2}}{u - r\,2\,Tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{Cos\frac{\delta}{2}}{Cos\frac{\alpha}{2}}, \text{ wie auch } \frac{1+\frac{2r}{u}\,Tg\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{2r}{u}\,Tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{Cos\frac{\delta}{2}}{Cos\frac{\alpha}{2}}$$

Setzt man jetzt $\frac{2r}{u}\,Tg\frac{\alpha}{2} = Tg\,\varphi$, wodurch φ bekannt wird, so ist $\frac{1+Tg\,\varphi}{1-Tg\,\varphi}$ oder

$Tg\,(45^0+\varphi) = \frac{Cos\frac{\delta}{2}}{Cos\frac{\alpha}{2}}$ also $Cos\frac{\delta}{2} = Tg\,(45^0+\varphi)\,Cos\frac{\alpha}{2}$ und es ist $\frac{\delta}{2}$ berechenbar, folglich kann man auch A, B, C und AB, AC, BC finden.

§ 27. $c m s$, $c m d$, $c s d$, $m s d$,

$c m u = c m s$, $c d u = c s d$, $m s u = c m s$, $s d u = c s d$.

Auflösung. Da $AC^2 = AD^2 + CD^2$ und $BC^2 = BD^2 + CD^2$ ist, so ergiebt sich

$$AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$$

d. h. $(AC + BC)\,(AC - BC) = (AD + BD)\,(AD - BD)$

oder $s\,.\,d = c\,.\,m$

Mit Hilfe dieser Gleichung lassen sich die hier aufgestellten Aufgaben auf $c s d$ reduziren und da in dieser Aufgabe eine Seite gegeben ist und aus s und d die beiden andern Seiten bestimmt werden können, so sind die noch fehlenden Winkel des Dreiecks ABC aus den Seiten zu berechnen.

§ 28. $c m h$ und $c m F = c m h$, weil $h = \frac{2F}{c}$ ist.

Da aus $c u m$ die Höhenschnitte $AD = \frac{c+m}{2}$ und $BD = \frac{c.m}{2}$ bekannt werden, so kennt man in den rechtwinkligen Dreiecken ACD und BCD die Katheten und findet $Tg\,A = \frac{2h}{c+m}$ und und $AC = \frac{h}{Sin\,A}$, sowie $Tg\,B = \frac{2h}{c-m}$ und $BC = \frac{h}{Sin\,B}$.

§ 29. $c\,m\,R$.

Auflösung. Es ist $c = h\,(Cotg\,A + Cotg\,B) = h \cdot \frac{Sin\,(B+A)}{Sin\,B\,Sin\,A}$ ebenso $m = h\,\frac{Sin\,(B-A)}{Sin\,B\,Sin\,A}$ also $\frac{c}{m} = \frac{Sin\,(B+A)}{Sin\,(B-A)} = \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\delta}$. Da aber auch $c = 2\,R\,Sin\,\alpha$ ist, so findet man $\frac{2\,R\,Sin\,\alpha}{m} = \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\delta}$, und

es ist $Sin\,\delta = \frac{m}{2\,R}$ und $Sin\,\alpha = \frac{c}{2\,R}$,

also lassen sich α und δ aus den Daten berechnen und daraus A, B, C bestimmen so wie $A\,B = 2\,R\,Sin\,C$, $A\,C = 2\,R\,Sin\,B$ und $B\,C = 2\,R\,Sin\,A$.

§ 30. $c\,s\,h$, $c\,d\,h$, $m\,s\,h$, $m\,d\,h$.

$c\,s\,F = c\,s\,h$, $c\,d\,F = c\,d\,h$, $c\,h\,u = c\,s\,h$, $c\,u\,F = c\,s\,h$, $s\,h\,u = c\,s\,h$,
$s\,h\,F = c\,s\,h$, $d\,h\,F = c\,d\,h$, $s\,u\,F = c\,s\,F = c\,h\,s$, $h\,u\,F = c\,s\,h$,
weil $u = c + s$ und $F = \frac{c\,h}{2}$ ist.

Auflösung für $c\,s\,h$. Es ist $c = h\,\frac{Sin\,(B+A)}{Sin\,B\,Sin\,A}$ und $s = h\,\frac{Sin\,B + Sin\,A}{Sin\,B\;\;Sin\,A}$

$$\frac{s}{c} = \frac{Sin\,B + Sin\,A}{Sin\,(B+A)} = \frac{2\,Sin\,\frac{B+A}{2}\,Cos\,\frac{B-A}{2}}{2\,Sin\,\frac{B+A}{2}\,Cos\,\frac{B+A}{2}} = \frac{Cos\,\frac{\delta}{2}}{Cos\,\frac{\alpha}{2}}.$$ Ferner

ist $$\frac{c}{h} = \frac{2\,Sin\,\frac{B+A}{2}\,Cos\,\frac{B+A}{2}}{Cos\,\frac{B-A^2}{2} - Cos\,\frac{B+A^2}{2}} = \frac{2\;Sin\,\frac{\alpha}{2}\,Cos\,\frac{\delta}{2}}{Cos\,\frac{\delta^2}{2} - Cos\,\frac{\alpha^2}{2}}$$

und da $Cos\,\frac{\delta}{2} = \frac{s}{c}\,Cos\,\frac{\alpha}{2}$ ist, so wird

$$\frac{c}{h} = \frac{2\;Sin\,\frac{\alpha}{2}\,Cos\,\frac{\alpha}{2}}{\frac{s^2}{c^2}Cos\frac{\alpha^2}{2} - Cos\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{2\,c^2\,Sin\,\frac{\alpha}{2}\,Cos\,\frac{\alpha}{2}}{(s^2 - c^2)\,Cos\,\frac{\delta^2}{2}} = \frac{2\,c^2}{s^2 - c^2}\,Tg\,\frac{\alpha}{2}$$

also ist $$Tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{s^2 - c^2}{2\,h\,c} = \frac{(s+c)\,(s-c)}{2\,h\,c}$$

Durch diese Gleichung wird $\frac{\alpha}{2}$ bestimmt und dann aus der Gleichung für $Cos\,\frac{\delta}{2}$ auch $\frac{\delta}{2}$ A, B, C findet man aus α und δ und $A\,C$, sowie $B\,C$ durch A, B und h.

§ 31. $c\,s\,R$, $c\,d\,R$, $m\,s\,R$, $m\,d\,R$.
$c\,R\,u = c\,s\,R$, $s\,R\,u = c\,s\,R$.

Auflösung für $c\,s\,R$. Es ist $c = 2\,R\,Sin\,C = 2\,R\,Sin\,(B+A) = 2\,R\,Sin\,\alpha$ also $Sin\,\alpha = \frac{c}{2\,R}$. Ferner ist $s = 2\,R\,(Sin\,B + Sin\,A) = 4\,R\,Sin\,\frac{B+A}{2}\,Cos\,\frac{B-A}{2}$ d. h. $s = 4\,R\;Sin\,\frac{\alpha}{2}\,Cos\,\frac{\delta}{2}$ folglich $Cos\,\frac{\delta}{2} = \frac{1}{4\,r\,Sin\,\frac{\alpha}{2}}$. Es lassen sich also α und δ findet und dadurch auch die Winkel und mit Hülfe des R die Seiten des Dreiecks $A\,B\,C$ finden.

§ 32. $c\,s\,r$, $m\,d\,r$
$s\,r\,u = c\,s\,r$, $s\,r\,F = s\,r\,u = c\,s\,r$.

Auflösung für $c\,s\,r$. Es ist $c = r\left(Cotg\,\frac{A}{2} + Cotg\,\frac{B}{2}\right)$

$$s = r\left(Cotg\,\frac{A}{2} + Cotg\,\frac{B}{2} + 2\,Cotg\,\frac{C}{2}\right),$$

$$\text{also } s - r = 2\,r\,Cotg\frac{C}{2} = 2\,r\,Tg\frac{B+A}{2} = 2\,r\,Tg\frac{\alpha}{2}$$

und $Tg\frac{\alpha}{2} = \frac{s-r}{2r}$ folglich $\frac{\alpha}{2}$ bestimmbar.

Ferner ist $\frac{c}{r} = \frac{Sin\frac{B+A}{2}}{Sin\frac{B}{2}\;Sin\frac{A}{2}} = \frac{2\;Sin\frac{B+A}{2}}{Cos\frac{B-A}{2} - Cos\frac{B+A}{2}} = \frac{2\;Sin\frac{\alpha}{2}}{Cos\frac{\delta}{2} - Cos\frac{\alpha}{2}}$

$$Cos\frac{\delta}{2} = Cos\frac{\alpha}{2} + \frac{2\,r}{c}\,Sin\frac{\alpha}{2}.$$

Setzt man $\frac{2\,r}{c} = T\,g\,\varphi$, so ist φ zu berechnen und

$Cos\frac{\delta}{2} = \frac{Cos\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right)}{Cos\;\varphi}$, also auch $\frac{\delta}{2}$ bestimmbar, und es lassen sich Winkel und Seiten des Dreiecks A B C finden.

Für $m\,d\,r$ ist $m = h\,\frac{Sin\,(B-A)}{Sin\,A - Sin\,B}$, $d = h\,\frac{Sin\,B - Sin\,A}{Sin\,B\;Sin\,A}$

$$\frac{m}{d} = \frac{Sin\,(B-A)}{Sin\,B\;Sin\,A} = \frac{2\;Sin\frac{B-A}{2}\,Cos\frac{B-A}{2}}{2\;Sin\frac{B-A}{2}\,.\,Cos\frac{B+A}{2}} = \frac{Cos\frac{\delta}{2}}{Cos\frac{\alpha}{2}}$$

Es ist aber auch $d = r\left(Cotg\frac{A}{2} - Cotg\frac{B}{2}\right) = \frac{r\;Sin\frac{B-A}{2}}{Sin\frac{B}{2}\;Sin\frac{A}{2}} = \frac{2\,r\;Sin\frac{B-A}{2}}{Cos\frac{B-A}{2} - Cos\frac{B+A}{2}}$

$$d = \frac{2\,r\;Sin\frac{\delta}{2}}{Cos\frac{\delta}{2} - Cos\frac{\alpha}{2}}$$

und da $Cos\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{m}\,Cos\frac{\delta}{2}$ ist, so ist

$$d = \frac{2\;r\;Sin\frac{\delta}{2}}{Cos\frac{\delta}{2} - \frac{d}{m}\;Cos\frac{\delta}{2}} = \frac{2\,r\,m}{m-d}\,Tg\frac{\delta}{2},$$

also $T\,g\frac{d}{2} = \frac{d\,(m-d)}{2\,r\,m}$ und $\frac{\delta}{2}$ bestimmbar.

§ 33. $m\,d\,u$.

Auflösung. Es ist $m = \frac{h\;Sin\,(B-A)}{Sin\,B\;Sin\,A}$ und $d = \frac{h\;(Sin\,B - Sin\,A)}{Sin\,B\;Sin\,A}$

$$\frac{m}{d} = \frac{Sin\,(B-A)}{Sin\,B - Sin\,A} = \frac{Cos\frac{B-A}{2}}{Cos\frac{B+A}{2}} = \frac{Cos\frac{\delta}{2}}{Cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Ferner ist $u = h\left(Cotg\frac{A}{2} + Cotg\frac{B}{2}\right) = h\,\frac{Sin\frac{B+A}{2}}{Sin\frac{B}{2}\;Sin\frac{A}{2}}$

$$d = \frac{2\,h\;Sin\frac{B-A}{2}\,Cos\frac{B+A}{2}}{4\;Sin\frac{B}{2}\,Cos\frac{B}{2}\;Sin\frac{A}{2}\;Cos\frac{A}{2}}$$

$$\frac{d}{u} = \frac{Sin\,\frac{B-A}{2}\;Cos\,\frac{B+A}{2}}{Sin\,\frac{B+A}{2}\,.\,2\;Cos\,\frac{B}{2}\;Cos\,\frac{A}{2}} = \frac{Sin\,\frac{B-A}{2}\;Cos\,\frac{B+A}{2}}{Sin\,\frac{B+A}{2}\left(Cos\,\frac{B-A}{2} + Cos\,\frac{B+A}{2}\right)}$$

$$\frac{d}{u}\,Tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{Sin\,\frac{\delta}{2}}{Cos\,\frac{\delta}{2} + Cos\,\frac{\alpha}{2}}.$$

Setzt man $Cos\,\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{m}\,Cos\,\frac{\delta}{2}$ hier ein, so ist

$$\frac{d}{u}\,Tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{m\;Sin\,\frac{\delta}{2}}{(m+d)\;Cos\,\frac{\delta}{2}} = \frac{m}{m+d}\,Tg\,\frac{\delta}{2}.$$

Aus $\frac{m}{d} = \frac{Cos\,\frac{\delta}{2}}{Cos\,\frac{\alpha}{2}}$ folgt ferner

$$\frac{m^2}{d^2} = \frac{Cos\,\frac{\delta^2}{2}}{Cos\,\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{1 + Tg\,\frac{\alpha^2}{2}}{1 + Tg\,\frac{\delta^2}{2}};$$ da $Cos\,\frac{\delta^2}{2} = \frac{1}{1 + Tg\,\frac{\delta^2}{2}}$ ist, und ähnlich $Cos\,\frac{\alpha^2}{2}$

also ist $m^2 + m^2\;Tg\,\frac{\delta^2}{2} = d^2 + d^2\;Tg\,\frac{\alpha^2}{2}$.

Da nun $Tg\,\frac{\delta}{2} = \frac{d\,(m+d)}{m\,u}\,.\;Tg\,\frac{\alpha}{2}$ ist, so erhält man

$$m^2 + \frac{d^2\,(m+d)^2}{u^2}\;Tg\,\frac{\alpha^2}{2} = d^2 + d^2\;Tg\,\frac{\alpha^2}{2}$$

$$m^2 - d^2 = \frac{d^2}{u^2}\left\{u^2 - (m+d)^2\right\}\;Tg\,\frac{\alpha^2}{2},$$

folglich $Tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{u}{d}\sqrt{\frac{(m+d)\,(m-d)}{(u+m+d)\,(u-m-d)}}$

Aus dieser Gleichung wird $\frac{\alpha}{2}$ bestimmt und aus der Gleichung für $\frac{m}{d}$ der Werth von $\frac{\delta}{2}$. Dadurch lassen sich A, B, C finden und nachdem man aus der Gleichung für m die Länge von h bestimmt hat, kann man auch die Seiten des $\triangle\,ABC$ berechnen.

§ 34. $m\;s\;F,\;m\;d\;F.$

Auflösung für $m\,d\,F$. Es ist

$$m = h\,\frac{Sin\,(B-A)}{Sin\,B - Sin\,A},\quad d = h\,\frac{Sin\,B - Sin\,A}{Sin\,B\;Sin\,A}$$

$$\text{also}\;\frac{m}{d} = \frac{Sin\,(B-A)}{Sin\,B - Sin\,A} = \frac{2\;Sin\,\frac{A-B}{2}\;Cos\,\frac{B-A}{2}}{2\;Sin\,\frac{B-A}{2}\;Cos\,\frac{B+A}{2}} = \frac{Cos\,\frac{\delta}{2}}{Cos\,\frac{\alpha}{2}}.$$

Ferner ist $2\,F = h^2\,\frac{Sin\,(B+A)}{Sin\,B\;Sin\,A}$ und $m^2 = h^2\,\frac{Sin\,(B-A)^2}{Sin\,B^2\;Sin\,A^2}$

$$\text{folglich}\;\frac{2\,F}{m^2} = \frac{Sin\,(B+A)\;Sin\,B\;Sin\,A}{(Sin\,B-A)^2} = \frac{2\;Sin\,\frac{B+A}{2}\;Cos\,\frac{B+A}{2}\left\{Cos\,\frac{B-A^2}{2} - Cos\,\frac{B+A^2}{2}\right\}}{4\;Sin\,\frac{B-A^2}{2}\,.\;Cos\,\frac{B-A^2}{2}}$$

$$\frac{4\,F}{m^2} = \frac{Sin\,\frac{\alpha}{2}\;Cos\,\frac{\alpha}{2}\left(Cos\,\frac{\delta^2}{2} - Cos\,\frac{\alpha^2}{2}\right)}{\left(1 - Cos\,\frac{\delta^2}{2}\right)\;Cos\,\frac{\delta^2}{2}}.$$

Nun ist 1) $Cos\frac{\delta}{2} = \frac{m}{d} Cos\frac{\alpha}{2}$ und daher

$$\frac{4F}{m^2} = \frac{Sin\frac{\alpha}{2}\,Cos\frac{\delta}{2}\left(\frac{m^2}{d^2} - 1\right)Cos\frac{\alpha}{2}^2}{\left(1 - \frac{m^2}{d^2}Cos\frac{\alpha}{2}^2\right)\cdot\frac{m^2}{d^2}Cos\frac{\alpha}{2}^2} = \frac{Sin\frac{\alpha}{2}\,Cos\frac{\delta}{2}\,(m^2 - d^2)\,d^2\Big)}{\left(d^2 - m^2\,Cos\frac{\alpha}{2}^2\right)m^2}$$

also $\frac{4F}{d^2(m^2 - d^2)} = \frac{Sin\frac{\alpha}{2}\,Cos\frac{\alpha}{2}}{d^2 - m^2\,Cos\frac{\alpha}{2}^2}$.

Setzt man nun $Sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Tg\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + Tg\frac{\alpha}{2}^2}}$ und $Cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + Tg\frac{\alpha}{2}^2}}$.

so ist $\frac{4F}{d^2(m^2 - d^2)} = \frac{\frac{Tg\frac{\alpha}{2}}{1 + Tg\frac{\alpha}{2}^2}}{d^2 - \frac{m^2}{1 + Tg\frac{\alpha}{2}^2}} = \frac{Tg\frac{\alpha}{2}}{d^2 + d^2\,Tg\frac{\alpha}{2}^2 - m^2}$

folglich $d^2 + d^2\,Tg\frac{\alpha}{2}^2 - m^2 = \frac{d^2(m^2 - d^2)}{4F}\,Tg\frac{\alpha}{2}$ und

$$Tg\frac{\alpha}{2}^2 - \frac{m^2 - d^2}{4F}\,Tg\frac{\alpha}{2} = \frac{m^2 - d^2}{d^2}$$

$$Tg\frac{\alpha}{2} = \frac{m^2 - d^2}{8F} \pm \sqrt{\frac{(m^2 - d^2)^2}{64F^2} + \frac{m^2 - d^2}{d^2}}.$$

Da $\frac{\alpha}{2} < 90^0$ ist, so muss $Tg\frac{\alpha}{2}$ positiv sein. Nun ist aber $m > d$ also $\frac{m^2 - d^2}{8F}$ positiv, und da unter dem Wurzelzeichen beide Werthe ebenfalls positiv sind, so ist der Wurzelwerth grösser als $\frac{m^2 - d^2}{8F}$, folglich würde $Tg\frac{\alpha}{2}$ negativ ausfallen, wenn man den negativen Werth der Wurzel berücksichtigte. Es ist daher

$$Tg\frac{\alpha}{2} = \frac{m^2 - d^2}{8F} + \sqrt{\frac{(m^2 - d^2)^2}{64F^2} + \frac{m^2 - d^2}{d^2}} = \frac{m^2 - d^2}{8F}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{64F^2}{d^2\,(m^2 - d^2)}}\right\}$$

Setzt man jetzt $\frac{8F}{d\sqrt{m^2 - d^2}} = Tg\,\varphi$, so ist auch $\frac{8F.\sqrt{m^2 - d^2}}{d\,(m^2 - d^2)} = Tg\,\varphi$ und

$\frac{m^2 - d^2}{8F} = \frac{\sqrt{m^2 - d^2}}{d\,.\,Tg\,\varphi}$, also

$$Tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{m^2 - d^2}}{d\,.\,Tg\,\varphi}\left\{1 + \sqrt{1 + Tg\,\varphi^2}\right\} = \frac{\sqrt{m^2 - d^2}}{d}\,\frac{1 + Sec\,\varphi}{Tg\,\varphi} = \frac{\sqrt{m^2 - d^2}}{d}\cdot\frac{Cos\,\varphi + 1}{Sin\,\varphi}$$

$$2)\ Tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{(m + d)\,(m - d)}}{d}\,Cotg\frac{\varphi}{2}$$

Aus dieser Gleichung findet man $\frac{\alpha}{2}$ und aus Gl. 1) $\frac{\delta}{2}$, also sind die Winkel des Dreiecks bestimmbar und auch seine Seiten, wenn man aus der Gleichung für m die Linie h berechnet.

§ 35. $c\,h\,R$, $m\,h\,R$; $c\,R\,F = c\,h\,R$, $h\,R\,F = c\,h\,R$.

Auflösung für $c\,h\,R$. Es ist $c = 2\,R\,Sin\,C = 2\,R\,Sin\,(B + A) = 2\,R\,Sin\,\alpha$

also $Sin\,\alpha = \frac{c}{2R}$ und α bestimmbar

Ferner ist $c = \frac{h \,.\, Sin\,(B+A)}{Sin\,B\,.\,Sin\,A} = \frac{2\,h\,Sin\,(B+A)}{Cos\,(B-A) - Cos\,(B+A)} = \frac{2\,h\,Sin\,\alpha}{Cos\,\delta - Cos\,\alpha}$

folglich $Cos\,\delta = Cos\,\alpha + \frac{2\,h}{c}\,Sin\,a.$

Setzt man $\frac{2\,h}{c} = Tg\,\varphi$ wodurch φ bestimmt wird, so ist

$$Cos\,\delta = \frac{Cos\,(\alpha - \varphi)}{Cos\,\varphi}$$

§ 36. $c\,h\,r,\ m\,h\,r;\ c\,r\,u = c\,h\,r,\ c\,r\,F = c\,h\,r,\ h\,r\,u = c\,h\,r,\ h\,r\,F = c\,h\,r.$

Auflösung für $c\,h\,r$. Es ist $c = h\,\frac{Sin\,(B+A)}{Sin\,B\ Sin\,A}$ und $c = r\,\frac{Sin\,\frac{B+A}{2}}{Sin\,\frac{B}{2}\ Sin\,\frac{A}{2}}$ also

$$1 = \frac{h}{r}\ \frac{2\,Cos\,\frac{B+A}{2}}{4\,Cos\,\frac{B}{2}\ Cos\,\frac{A}{2}} = \frac{h}{r}\ \frac{Cos\,\frac{B+A}{2}}{Cos\,\frac{B-A}{2} + Cos\,\frac{B+A}{2}} = \frac{h}{r}\ \frac{Cos\,\frac{\alpha}{2}}{Cos\,\frac{\delta}{2} + Cos\,\frac{\alpha}{2}}$$

$$1)\ Cos\,\frac{\delta}{2} = \frac{h-r}{r}\,Cos\,\frac{\alpha}{2}$$

Aus der Gleichung für c durch r folgt $c = \frac{2\,r\,Sin\,\frac{B+A}{2}}{Cos\,\frac{B-A}{2} - Cos\,\frac{B+A}{2}} = \frac{2\,r\,Sin\,\frac{\alpha}{2}}{Cos\,\frac{\delta}{2} - Cos\,\frac{\alpha}{2}}$, also ist,

wenn man den Werth von $Cos\,\frac{\delta}{2}$ einsetzt, $c = \frac{2\,r\,Sin\,\frac{\alpha}{2}}{\frac{h-r}{r}\,Cos\,\frac{\alpha}{2} - Cos\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\,r^2}{h-2\,r}\,.\,Tg\,\frac{\alpha}{2}$

$$\text{und } Tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{c\,(h-2\,r)}{r^2}$$

Durch diese Gleichung bestimmt man $\frac{\alpha}{2}$ und dann durch Gleichung 1) $\frac{\delta}{2}$ u. s. w.

§ 37. $c\,R\,r,\ m\,R\,r.$

Auflösung für $c\,R\,r$. Es ist $c = 2\,R\,Sin\,\alpha$ also $Sin\,\alpha = \frac{C}{2\,R}$

ferner $c = r\,\frac{Sin\,\frac{B+A}{2}}{Sin\,\frac{B}{2}\ Sin\,\frac{A}{2}} = \frac{2\,r\,Sin\,\frac{\alpha}{2}}{Cos\,\frac{\delta}{2} - Cos\,\frac{\alpha}{2}}$

$$Cos\,\frac{\delta}{2} = Cos\,\frac{\alpha}{2} + \frac{2\,r}{c}\,Sin\,\frac{\alpha}{2}$$

Setzt man jetzt $\frac{2r}{c} = Tg\,\varphi$, so ist

$$Cos\,\frac{\delta}{2} = \frac{Cos\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right)}{Cos\,\varphi}$$

§ 38. $s\,d\,F.$

Auflösung. Es ist $2\,F = \frac{h^2\,Sin\,(B+A)}{Sin\,A\ Sin\,B} = \frac{h}{Sin\,B}\ \frac{h}{Sin\,A}\,.\,Sin\,a.$

Nun ist $\frac{h}{Sin\,A} = AC,\ \frac{h}{Sin\,B} = BC$, ferner $AC + BC = s,\ AC - BC = d$, also $AC = \frac{s+d}{2}$ und

$BC = \frac{s-d}{2}$, folglich $2F = \frac{s+d}{2} \cdot \frac{s-d}{2} Sin\, \alpha$, und aus

$Sin\, \alpha = \frac{F}{(s+d)\,(s-d)}$ ist α bestimmbar.

Endlich wissen wir aus der Trigonometrie, dass

$$(AC + BC) : (AC - BC) = Tg\, \frac{B+A}{2} : Tg\, \frac{B-A}{2}$$

$$\text{d. h. } s : d = Tg\, \frac{\alpha}{2} : Tg\, \frac{\delta}{2}$$

$$Tg\, \frac{\delta}{2} = \frac{d}{s} Tg\, \frac{\alpha}{2}.$$

Aus α und δ findet man die Winkel A, B, C; aus s und d AC und BC und dann ist $AB : AC = Sin\, C : Sin\, B$.

§ 39. $s\,h\,R,\ d\,h\,r$.

Auflösung für $s\,h\,R$. Es ist $s = h\, \frac{Sin\, B + Sin\, A}{Sin\, B\, Sin\, A}$

und $s = 2R\,(Sin\, B + Sin\, A)$

also $2R\, Sin\, A\, Sin\, B = h$

$$Sin\, A = \frac{h}{2R\, Sin\, B}$$

Setzt man diesen Werth für $Sin\, A$ in die zweite Gleichung, so ist

$$\frac{s}{2R} = Sin\, B + \frac{h}{2R\, Sin\, B}$$

$$Sin\, B^2 - \frac{s}{2R} Sin\, B = -\frac{h}{2R}$$

$$Sin\, B = \frac{s}{4R} \pm \sqrt{\frac{s^2}{16R^2} - \frac{h}{2R}} = \frac{s}{4R}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{8hR}{s^2}}\right\}$$

So lange der positive Werth $\frac{8R}{s^2}$ nicht grösser als 1 ist, lässt sich $Sin\, B$ u. B bestimmen und die Aufgabe ist lösbar.

Nehmen wir diesen Fall an und setzen $\frac{1}{s}\sqrt{8hr} = Sin\, \varphi$, so wird

$$Sin\, B = \frac{s}{4R}(1 \pm \sqrt{1 - Sin\, \varphi^2}) = \frac{s}{4R}(1 \pm Cos\, \varphi)$$

$$\text{also 1) } Sin\, B = \frac{s}{2R} Cos\, \frac{\varphi}{2}^2 \text{ und 2) } Sin\, B = \frac{s}{2R} Sin\, \frac{\varphi}{2}^2$$

Hat man B bestimmt, so findet man aus der Gleichung für $Sin\, A$ auch das dazu gehörige A und dann mit Hülfe von h die Seiten des Dreiecks ABC.

§ 40. $s\,h\,r,\ d\,h\,r$.

Auflösung für $s\,h\,r$. Es ist $s = \frac{h\,(Sin\, B + Sin\, A)}{Sin\, B \cdot Sin\, A}$

und $s = r\left(Cotg\, \frac{A}{2} + Cotg\, \frac{B}{2} + 2\, Cotg\, \frac{C}{2}\right)$

$$\text{also } \frac{h\, Sin\, \frac{B+A}{2} \cdot Cos\, \frac{B-A}{2}}{2\, Sin\, \frac{B}{2}\, Cos\, \frac{B}{2}\, Sin\, \frac{A}{2}\, Cos\, \frac{A}{2}} = r\left(\frac{Sin\, \frac{B+A}{2}}{Sin\, \frac{B}{2}\, Sin\, \frac{A}{2}} + \frac{2\, Sin\, \frac{B+A}{2}}{Cos\, \frac{B+A}{2}^2}\right)$$

$$\frac{h\,Cos\,\frac{B-A}{2}}{2\,Cos\,\frac{B}{2}\,Cos\,\frac{A}{2}} = r\,\frac{Cos\,\frac{B+A}{2} + 2\,Sin\,\frac{B}{2}\,Sin\,\frac{A}{2}}{Cos\,\frac{B+A}{2}} = \frac{r\,Cos\,\frac{B-A}{2}}{Cos\,\frac{B+A}{2}}$$

$$\frac{h}{Cos\,\frac{B-A}{2} + Cos\,\frac{B+A}{2}} = \frac{r}{Cos\,\frac{B+A}{2}}$$

d. h. $h\,Cos\,\frac{\alpha}{2} = r\,Cos\,\frac{\delta}{2} + r\,Cos\,\frac{\alpha}{2}$

1) $(h-r)\,Cos\,\frac{\alpha}{2} = Cos\,\frac{\delta}{2}$

Ferner ist $\frac{s}{h} = \frac{2\,Sin\,\frac{B+A}{2}\,Cos\,\frac{B-A}{2}}{Cos\,\frac{B-A}{2}^2 - Cos\,\frac{B+A}{2}^2} = \frac{2\,Sin\,\frac{\alpha}{2}\,Cos\,\frac{\delta}{2}}{Cos\,\frac{\delta}{2}^2 - Cos\,\frac{\alpha}{2}^2}$ und da aus

Gleichung 1) $Cos\,\frac{\delta}{2} = \frac{h-r}{r}\,Cos\,\frac{\alpha}{2}$ ist, so hat man

$$\frac{s}{2\,h} = \frac{Sin\,\frac{\alpha}{2}\,.\,\frac{h-r}{r}\,Cos\,\frac{\alpha}{2}}{\frac{(h-r)^2}{r^2}\,Cos\,\frac{\alpha}{2}^2 - Cos\,\frac{\alpha}{2}^2} = \frac{r\,(h-r)}{h\,(h-2\,r)}\cdot Tg\,\frac{\alpha}{2}$$

also ist $Tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{s\,(h-2\,r)}{2\,r\,(h-r)}$, und es lässt sich $\frac{\alpha}{2}$ und dadurch auch $\frac{\delta}{2}$ bestimmen, so dass man jetzt Winkel und Seiten des Dreiecks $A\,B\,C$ leicht berechnen kann.

§ 41. $h\,R\,r$.

Auflösung. Es ist $A\,B = h\,\frac{Sin\,(B+A)}{Sin\,B\,Sin\,A}$

$$A\,B = 2\,R\,Sin\,(B+A)$$

$$A\,B = r\,\frac{Sin\,\frac{B+A}{2}}{Sin\,\frac{B}{2}\,Sin\,\frac{A}{2}}$$

also $\frac{r}{h} = \frac{Sin\,(B+A)\,Sin\,\frac{A}{2}\,Sin\,\frac{B}{2}}{Sin\,B\;Sin\,A\;Sin\,\frac{B+A}{2}} = \frac{2\,Cos\,\frac{B+A}{2}}{4\,Cos\,\frac{B}{2}\,Cos\,\frac{A}{2}} = \frac{Cos\,\frac{B+A}{2}}{Cos\,\frac{B-A}{2} + Cos\,\frac{B+A}{2}}$

d. h. $\frac{r}{h} = \frac{Cos\,\frac{\alpha}{2}}{Cos\,\frac{\delta}{2} + Cos\,\frac{\alpha}{2}}$

1) $r\,Cos\,\frac{\delta}{2} = (h-r)\,Cos\,\frac{\alpha}{2}$

Ferner ist $\frac{r}{2\,R} = \frac{Sin\,(B+A)\;Sin\,\frac{B}{2}\;Sin\,\frac{A}{2}}{Sin\,\frac{B+A}{2}} = 2\,Cos\,\frac{B+A}{2}\,Sin\,\frac{B}{2}\,Sin\,\frac{A}{2}$

$$= Cos\,\frac{B+A}{2}\left(Cos\,\frac{B-A}{2} - Cos\,\frac{B+A}{2}\right)$$

$\frac{r}{2\,R} = Cos\,\frac{\alpha}{2}\left(Cos\,\frac{\delta}{2} - Cos\,\frac{\alpha}{2}\right)$

Setzt man jetzt für $Cos\,\frac{\delta}{2}$ seinen Werth aus Gleichung 1 so ist

$$\frac{r}{2\,R} = Cos\,\frac{\alpha}{2}\left(\frac{h-r}{r}\,Cos\,\frac{\alpha}{2} - Cos\,\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h-2\,r}{r}\,Cos\,\frac{\alpha}{2}^2$$

$$Cos\,\frac{\alpha}{2} = r\sqrt{\frac{1}{2\,R\,(h-2\,r)}}$$

also lassen sich $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\delta}{2}$ bestimmen und daher auch die Winkel und Seiten des $\triangle\,A\,B\,C$ finden.

§ 42. Zur Berechnung der Winkel und Seiten eines Dreiecks $A\,B\,C$, (Figur 2) sind die Höhe $C\,D = h$, die Halbirungslinie des Winkels $A\,C\,B$, $C\,E = w$ und die Schwerlinie $C\,F = t$ gegeben.

Auflösung. Es ist $\angle\,E\,C\,B = \frac{1}{2}\,C = 90^0 - \frac{B+A}{2}$

$$\angle\,D\,C\,B = 90^0 - B$$

also $\angle\,E\,C\,B - \angle\,D\,C\,B = \angle\,E\,C\,D = \frac{B-A}{2}$.

Nun ist $Cos\,E\,D\,C = \frac{C\,D}{C\,E}$

d. h. $Cos\,\frac{\delta}{2} = \frac{h}{w}$, folglich kann $\frac{\delta}{2}$ berechnet werden.

Ferner ist $A\,C^2 + B\,C^2 = 2\left(\frac{A\,B}{2}\right)^2 + C\,F^2$ und da

$A\,C = \frac{h}{Sin\,A}$, $B\,C = \frac{h}{Sin\,B}$, $A\,B = h\,(Cotg\,A + Cotg\,B)$ ist, so erhält man

$$\frac{h^2}{Sin\,A^2} + \frac{h^2}{Sin\,B^2} = \frac{1}{2}\,h^2\,(Cotg\,A + Cotg\,B)^2 + 2\,t^2.$$

Setzt man $Sin\,A^2 = \frac{1}{1+Cotg\,A^2}$ und $Sin\,B^2 = \frac{1}{1+Cotg\,B^2}$, so ist

$$h^2 + h^2\,Cotg\,A^2 + h^2 + h^2\,Cotg\,B^2 = \frac{1}{2}\,h^2\,(Cotg\,A + Cotg\,B)^2 + 2t^2$$

$$\text{also}\ \frac{1}{2}\,(Cotg\,A - Cotg\,B)^2 = 2\,(t^2 = h^2)$$

$Cotg\,A - Cotg\,B = +\frac{2}{h}\sqrt{t^2 - h^2}$ denn es ist Winkel A kleiner als Winkel B und jedenfalls spitz. Aus der vorhergehenden Gleichung folgt

$$\frac{2\,Sin\,(B-A)}{Cos\,(B-A) - Cos\,(B+A)} = \frac{2}{h}\sqrt{t^2 - h^2}$$

$$\text{also ist}\ \frac{h}{\sqrt{t^2-h^2}}\,Sin\,\delta = Cos\,\delta - Cos\,\alpha\ \text{und}$$

$$Cos\,\alpha = Cos\,\delta - \frac{h}{\sqrt{t^2-h^2}}\,Sin\,\delta$$

Setzt man jetzt $\frac{h}{\sqrt{t^2-h^2}}$ oder $\frac{h}{\sqrt{(t+h)(t-h)}} = Tg\,\varphi$, so ist

$$Cos\,\alpha = \frac{Cos\,(\delta+\varphi)}{Cos\,\varphi}.$$

Hieraus lässt sich α finden, und es ist dann $B = \frac{\alpha+\delta}{2}$, $A = \frac{\alpha-\delta}{2}$, $C = 180^0 - \alpha$, ferner $A\,C = \frac{h}{Sin\,A}$, $B\,C = \frac{h}{Sin\,B}$ und $A\,B = \frac{h\,Sin\,(B+A)}{Sin\,A\,Sin\,B}$.

§ 43. Die Entfernung $M\,n$ der Mittelpunkte des um und in das Dreieck $A\,B\,C$ (Fig. 1) beschriebenen Kreises soll durch die Radien R und r berechnet werden.

Auflösung. Nach der § 4 angeführten Construction sind M und n die Mittelpunkte des um und eingeschriebenen Kreises und $M\,B$ so wie $n\,e$ Radien. Betrachtet man $\triangle\,M\,n\,B$, so ist $M\,n^2 = M\,B^2 + n\,B^2 - 2\,M\,B\,.\,n\,B\,.\,Cos\,M\,B\,n$

Nun ist $M\,B = R$

$$nB = \frac{ne}{Sin\, n B e} = \frac{r}{Sin\, \frac{B}{2}}$$

$$\sphericalangle MBn = \sphericalangle nBe - \sphericalangle MBE = \frac{B}{2} - \sphericalangle MBE.$$

Es ist aber $\sphericalangle MBE = 90^0 - \frac{AMB}{2}$ weil $\triangle AMB$ gleichschenklig ist, und da $\sphericalangle AMB = 2\,ACB$ oder $2\,C$ als Centriwinkel ist, so ist

$$\sphericalangle MBE = 90^0 - C = 90^0 - (180^0 - (A + B)) = A + B - 90^0$$

folglich $\sphericalangle MBn = \frac{B}{2} - (A + B - 90) = 90^0 - \left(A + \frac{B}{2}\right)$

und $Cos\, MBn = Cos\left[90^0 - \left(A + \frac{B}{2}\right)\right] = Sin\left(A + \frac{B}{2}\right)$,

also ist $Mn^2 = R^2 + \frac{r^2}{Sin\, \frac{B}{2}^2} - 2R \,.\, \frac{r}{Sin\, \frac{B}{2}} \,.\, Sin\left(A + \frac{B}{2}\right)$

$$Mn^2 = R^2 + \frac{r}{Sin\, \frac{B}{2}} \left\{ \frac{r}{Sin\, \frac{B}{2}} - 2R\left(Sin\, A\, Cos\, \frac{B}{2} + Cos\, A\, Sin\, \frac{B}{2}\right) \right\}$$

Ferner ist $AB = 2R\, Sin\, C = 2R\, Sin\,(B + A)$ und auch

$$AB = r\left(Cotg\, \frac{A}{2} + Cotg\, \frac{B}{2}\right) = r\, \frac{Sin\, \frac{B+A}{2}}{Sin\, \frac{B}{2}\, Sin\, \frac{A}{2}},$$

also $2R\, Sin\,(A + B) = r\, \frac{Sin\, \frac{B+A}{2}}{Sin\, \frac{B}{2}\, Sin\, \frac{A}{2}}$ und

$$4R \,.\, Cos\, \frac{B+A}{2} \,.\, Sin\, \frac{B}{2}\; Sin\, \frac{A}{2} = r$$

Setzt man in die Gleichung für Mn^2 innerhalb der Parenthese für r diesen Werth ein, so wird

$$Mn^2 = R^2 + \frac{r}{Sin\, \frac{B}{2}} \left\{ 4R\, Cos\, \frac{B+A}{2}\, Sin\, \frac{A}{2} - 2R\, Sin\, A\, Cos\, \frac{B}{2} - 2R\, Cos\, A\, Sin\, \frac{B}{2} \right\}$$

Da aber $Cos\, \frac{B+A}{2} = Cos\left(\frac{B}{2} + \frac{A}{2}\right) = Cos\, \frac{B}{2}\, Cos\, \frac{A}{2} - Sin\, \frac{B}{2}\, Sin\, \frac{A}{2}$ ist, so erhält man

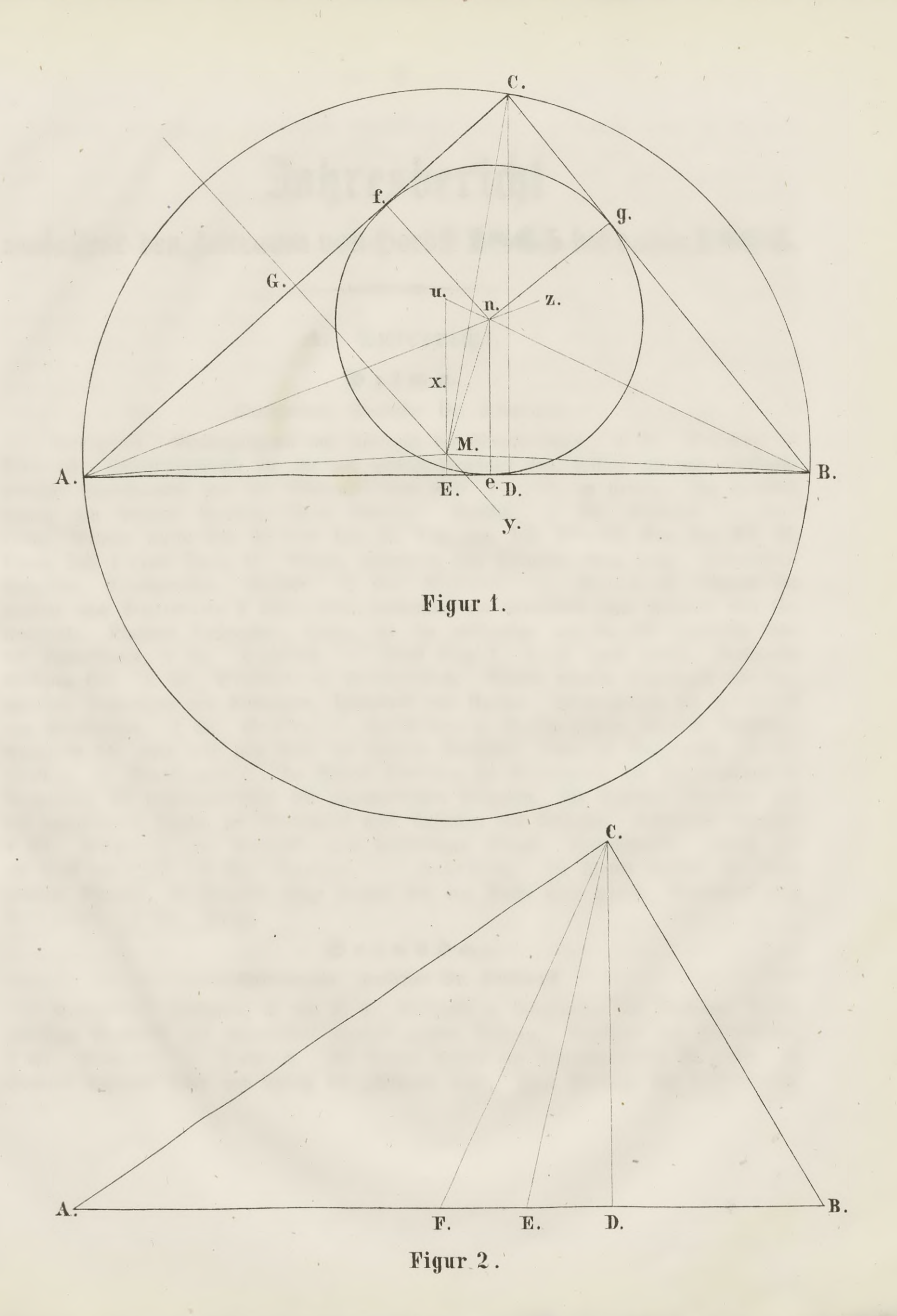
$$Mn^2 = R^2 + \frac{r}{Sin\, \frac{B}{2}} \left\{ 4R\, Cos\, \frac{B}{2}\, Cos\, \frac{A}{2}\, Sin\, \frac{A}{2} - 4R\, Sin\, \frac{B}{2}\, Sin\, \frac{A}{2}^2 - 4R\, Sin\, \frac{A}{2}\, Cos\, \frac{A}{2} \,.\, Cos\, \frac{B}{2} - 2\, Cos\, A\, Sin\, \frac{B}{2} \right\}$$

also ist $Mn^2 = R^2 - 2Rr\left\{2\, Sin\, \frac{A}{2}^2 + Cos\, A\right\} = R^2 - 2Rr\left\{2\, Sin\, \frac{A}{2}^2 + 1 - 2\, Sin\, \frac{A}{2}^2\right\}$

d. h. $Mn^2 = R^2 - 2Rr$

$$Mn = \sqrt{R(R - 2r)}$$

Danzig, Druck von A. W. Kafemann.



Figur 1.

Figur 2.

Jahresbericht

umfassend den Zeitraum von Herbst 1865 bis dahin 1866.

A. Unterricht.

Prima.

Ordinarius: Professor Dr. Gützlaff.

Religion. Kirchengeschichte und Uebersicht der Glaubenslehre. 2 St. Breiter. — Deutsch. Literaturgeschichte der alt- und mittelhochdeutschen Zeit, Lektüre alt- und mittelhochdeutscher Sprachproben und des Nibelungenliedes (Str. 1—260) im Urtexte. Im Sommer Lesung von Lessings Laokoon. Freie Vorträge. Aufsätze. 3 St. Künzer. — Latein. Gelesen wurde Cic. de orat. Lib. II, Tac. ann. Lib. IV—VI, Hor. Ep. Lib. II, Carm. Lib. I (zum Theil) II. Mündl. Uebersetzen aus Süpfle, Neue Folge, zweiwöchent. Exercitien, Extemporalien, Aufsätze. 8 St. Breiter. — Griechisch. Cursus der Syntax nach Buttmann § 122—133, wöchentlich ein Exercitium (aus Nepos) oder Extemporale. Platonis Euthyphro, Crito, die 3te philippische und die 1ste olynthische Rede des Demosthenes, 4 St. Kühnast. — Ilias Buch 1, 3, 6 (zum Theil). Sophoclis Oedipus Col. 2 St. Breiter. — Französisch. Gelesen wurden Dichtungen von Lamartine, Delavigne und Béranger, Iphigénie von Racine. Wiederholung der Grammatik und Stilübungen. 2 St. Gräser. — Geschichte u. Geographie. Mittlere Geschichte, Repetition der alten und zum Theil der neueren Geschichte, sowie der Geographie. 3 St. Reddig. — Mathematik. Im Winter Repetition der Goniometrie und Trigonometrie in Verbindung mit trigonometrischen und planimetrischen Aufgaben. Im Sommer Repetition aus den verschiedenen Theilen der Mathematik nebst Aufgaben aus denselben. Schriftliche Arbeiten. 4 St. Gützlaff. — Physik. Die luftförmigen Körper. Wellentheorie. Akustik und ein Theil der Optik. 2 St. Künzer. — Hebräisch. Im Winter wurden die ersten zwanzig Psalmen, im Sommer einige Kapitel aus dem Buche Hiob gelesen, Grammatik nach Gesenius. 2 St. Zeyß.

Secunda.

Ordinarius: Professor Dr. Kühnast.

Religion. Einleitung in das A. T., Geschichte u. Geographie von Palästina, Lesung gewählter Abschnitte aus sämmtlichen alttestamentlichen Büchern. Repetition des Katechismus. 2 St. Breiter. — Deutsch. Im Winter Lektüre des Nibelungenliedes im Urtext, im Sommer Schillers Leben und Lesung des „Wilhelm Tell". Freie Vorträge und Dispositions-

übungen in beiden Semestern. 2 St. Im Winter Delbrück, im Sommer Zielcke. — Latein. Virgil. Aen. Libb. III—V, VI zum Theil. 2 St. Reddig. Liv. I. Cic. pro Sulla, Philipp. I^ma^, Kursus der Syntax nach Zumpt mit Einschluß der Synt. ornata. 8 Aufsätze. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. Mündliches Uebersetzen aus Süpfle Theil II, Nr. 1—75. 8 St. Kühnast. — Griechisch. Repetition einiger Abschnitte aus der Formenlehre, Hauptregeln der Syntax nach Buttmann. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. Mündliches Uebersetzen aus Franke's Aufgaben Kurs. III, 1-25. Xenoph. Hellen. III, Cap. 2 ff. und IV. 4 St. Kühnast. Homer Od. 18—21. 2 St. Im Winter Delbrück, im Sommer Zielcke. — Französisch. Lektüre aus Plötz Chrestomathie p. 102—196 und Racine's Athalie. Grammatische Repetitionen nach Plötz bis zur Lehre vom part. passé. Schriftl. Arbeiten. 2 St. Gräser. — Hebräisch. Grammatik nach Gesenius. Lektüre in Gesenius Lesebuch 1—12. 2 St. Zeyß. — Geschichte und Geographie. Römische Geschichte, Geographie der Länder um das Mittelmeer. 3 St. Reddig. — Mathematik. Goniometrie u. Trigonometrie, planimetrische Aufgaben. Lehre von den Logarithmen, Gleichungen vom 1. Grade mit einer und mehreren unbekannten, Gleichungen vom 2. Grade mit einer unbekannten Größe. Vierwöchentlich eine größere schriftliche Arbeit. 4 St. Gützlaff. — Physik. Das hauptsächlichste aus der Lehre von der Wärme, dem Lichte und dem Magnetismus; einiges von der Frictionselectricität. 1 St. Gützlaff.

Ober-Tertia.

Ordinarius: Oberlehrer Reddig.

Religion. Im Winter Lesung des Evangeliums Lucä, Wiederholung des Katechismus. Im Sommer Besprechung des apostolischen Zeitalters, des neutestamentlichen Kanons, Mittheilungen aus der Kirchengeschichte. 5 Lieder sind memorirt. 2 St. Künzer. — Deutsch. Einzelne Punkte der Grammatik wurden erläutert, Stücke aus Lehmann's Lesebuch Thl. II, Abth. 3. und die Geschichte des Abfalls der vereinigten Niederlande von Schiller gelesen. Aufsätze. 2 St. Reddig. — Latein. Caesar d. b G. Libb. III—VI gelesen, L. I repetirt. Tempus- und Moduslehre, Gebrauch des Infinitivs, Participiums, Grundiums nach Ferd. Schultz, mündliches Uebersetzen aus Grubers Uebungsbuch. Exercitien und Extemp. wöchentlich. 6 St. Im Winter Delbrück, im Sommer Zschech. Ovid. Met. XIII. 2 St. Im Winter Rudloff, im Sommer Zielcke. — Griechisch. Xenoph. Anabasis II—IV. Hom. Od. V 1—350 (1—80 memorirt). Beendigung der Formenlehre nach Spieß, einzelne Punkte der Syntax. Mündliches Uebersetzen aus Spieß Uebungsbuch (c. 30 Stücke.) Exercit. u. Extemp. wöchentlich. 6 St. Reddig. — Französisch. Grammatik nach Ploetz bis Lect. 49, Charles XII v. Voltaire L. 6—8. 3 St. Gräser. — Geschichte u. Geographie. Preußische Geschichte, Wiederholung der griechischen und römischen Geschichte nach Bauers Tabellen. Geographie des römischen Staats, Repetitionen aus anderen Kursen nach Voigt. 4 St. Reddig. — Mathematik. Repetition der Rechnungen mit gewöhnlichen und Decimalbrüchen. Verhältnißrechnung, Buchstabenrechnung, Gleichungen vom 1. Grade nebst vielen arithmetischen Aufgaben. Wiederholung der Planimetrie und Cap. 6—15 nach Grunerts Lehrbuche. 3 St. Gützlaff.

Unter-Tertia.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Künzer.

Religion. Im Winter Lesung des Evangeliums Matthäi, Memoriren der Bergpredigt. Im Sommer Uebersicht der israelitischen Geschichte, speciell nach dem Exil, Geographie Palästinas. In beiden Semestern Wiederholung des Katechismus, Erlernung von fünf Kirchenliedern. 2 St. Künzer. — Deutsch. Lesen, Declamiren, Erzählen. Aufsätze. 2 St. Im Winter Zielcke, im Sommer Rudloff. — Latein. Caesar d. b. G. IV, V (zum Theil), Ovid metam. L. VI (Auswahl), Kasuslehre und ein Theil der Tempuslehre nach Ferd. Schultz Grammatik. Mündliches Uebersetzen nach Süpfle Th. I, wöchentlich ein Exercit. oder Extemp. 10 St. Zeyß. — Griechisch. Formenlehre nach Spieß bis zum unregelm. Verbum, Uebersetzen aus dem Uebungsbuch von Spieß. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. 6 St. Rudloff. — Französisch. Plötz Grammatik L. 1—26. Lektüre aus Lüdeking's Lesebuch I, 1—40. 2 St. Gräser. — Geschichte u. Geographie. Wiederholung der alten Geschichte, deutsche Geschichte nach Cauers Tabellen. Geographie der außereuropäischeu Erdtheile nach Voigt. Kartenzeichnen. 3 St. Im Winter Zielcke, im Sommer Zschech. — Mathematik. Decimalbrüche, Wurzelausziehen, Verhältnißrechnung, Lehre von den entgegengesetzten Größen. Planimetrie nach Grunert Cap. 1—6. Aufgaben von Stunde zu Stunde. 3 St. Gützlaff. — Naturkunde. Mineralogie mit besonderer Berücksichtigung der Krystallographie, Mittheilungen aus der Geologie. Einzelne Theile der Zoologie und Botanik wurden gelegentlich der Excursionen wiederholt. 2 St. Künzer.

Quarta.

Ordinarius: Im Winter Gymnasiallehrer Dr. Delbrück, im Sommer Gymnasiallehrer Dr. Zielcke.

Religion. Die ersten drei Hauptstücke des Katechismus wurden erklärt und Sprüche dazu memorirt, das vierte und fünfte Hauptstück erlernt und kurz erläutert, sodann die Apostelgeschichte gelesen. 5 Kirchenlieder sind memorirt. 2 St. Künzer. — Deutsch. Lektüre in Lehmanns Lehrbuch, Uebungen im Erzählen nach privatim gelesenen Schriften, Memoriren von Gedichten. Aufsätze dreiwöchentlich. 2 St. Im Winter Delbrück, im Sommer Zielcke. — Latein. Corn. Nepos Miltiades, Themistocles, Aristides, Pausanias, Cato sind gelesen, einige Kapitel memorirt. Repetition der Etymologie, Rection des Casus nach Ferd. Ferd. Schultz Grammatik. Wöchentl. ein Exercitium oder Extemp. 10 St. Zielcke. — Griechisch. Die Formenlehre bis zu den verbis liquidis. Vocabellernen und Uebersetzen nach Spieß Uebungsbuch. Exercit. 6 St. Im Winter Delbrück, im Sommer Zielcke. — Französisch. Plötz Elementarbuch wurde von Anfang an wiederholt und beendigt. 2 St. Gräser. — Geschichte u. Geographie. Die Hauptfacta der griechischen und römischen Geschichte nach Cauers Tabelle, physische und politische Geographie von Europa. Im Winter Delbrück, im Sommer Rudloff. — Mathematik. Rechnen mit gewöhnlichen und Decimalbrüchen, Proportionen. Aufgaben von Stunde zu Stunde. 3 St. Gützlaff. — Zeichnen. Nach Vorbildern. 2 St. Berendt.

Quinta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Gräser.

Religion. Erklärung des 2. u. 3. Hauptstücks des Katechismus. Biblische Geschichte nach Preuß p. 157 bis Ende. Erlernung der nöthigen Bibelsprüche und einiger Kirchenlieder, Bibellesung im Anschluß an die biblische Geschichte. 3 St. Kühnast. — Deutsch. Uebungen im Lesen, Erzählen, Declamiren. Schriftliche Arbeiten. 3 St. Rudloff. — Latein. Einübung der regelm. u. unregelm. Formenlehre, so wie einiger syntaktischer Regeln nach Schultz Gramm. u. Spieß Uebungsbuch. Wöchentl. eine schriftl. Arbeit. 9 St. Rudloff. — Französisch. Die ersten Anfänge bis zum regelmäßigen Zeitwort nach Plötz Elementarbuch L. 1—59. 3 St. Gräser. — Geographie. Repetition des 1. Cursus in Voigt's Leitfaden; Flüsse und Hauptgebirge sämmtlicher Erdtheile nach Voigt Cursus II. 2 St. Gräser. — Rechnen. Bruchrechnung, Rechnungen des bürgerlichen Lebens. Wöchentl. Arbeiten. 3 St. Künzer. — Naturkunde. Im Winter Zoologie (Säugethiere). Im Sommer Botanik (Pflanzentheile, das Linnésche System, einige der wichtigsten Familien des natürlichen Systems). 2 St. Künzer. — Zeichnen nach der Wandtafel und Vorlegeblättern. 2 St. Berendt. — Schreiben nach deutschen und lateinischen Vorschriften. 3 St. Berendt.

Sexta.

Ordinarius: Im Winter Gymnasiallehrer Dr. Zielcke, im Sommer Dr. Zschech.

Religion. Bibl. Geschichte nach Preuß 1—82. Erlernung des ersten Hauptstückes im Katechismus und einiger Kirchenlieder. 3 St. Zeyß. — Deutsch. Lesen im Lesebuch, Erzählen, Declamiren. Wöchentlich ein Diktat. 3 St. Im Winter Rudloff, im Sommer Zschech. — Latein. Einübung der regelmäßigen Formenlehre (Declination des Subst., Adj., Numerale, Fürwörter, die vier Conjugationen nach Schultz Grammatik, Vocabellernen und Uebersetzen aus Spieß Uebungsbuch. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemp. 9 St. Im Winter Zielcke, im Sommer Zschech. — Geographie. Topographie nach Voigt Cursus 1. 2 St. Zeyß. — Rechnen. Die vier Species mit ungleich benannten Zahlen. Anfänge der Bruchrechnung, Aufgaben des bürgerlichen Lebens. Das Kopfrechnen wurde vorwiegend geübt. Wöchentl. schriftl. Arbeiten. 4 St. Künzer. — Naturkunde. Im Winter Zoologie (einzelne Säugethiere), im Sommer Botanik (Beschreibung von c. 20 Pflanzen). 2 St. Künzer. — Zeichnen. Uebung im Zeichnen grader Linien in allen Richtungen, Zeichnen nach der Wandtafel und Vorlegeblättern. 2 St. Berendt. — Schreiben. Schreiben nach deutschen und lateinischen Vorschriften. 3 St. Berendt.

Am Unterricht in der englischen Sprache (facultativ) nahmen Schüler aus den obern Klassen (bis III^a incl.) Theil. Dieselben wurden in der Elementargrammatik und im Uebersetzen leichter Lesestücke nach des Lehrers Handbuche geübt. 2 St. Gräser.

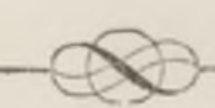
Gesangunterricht wurde in fünf Abtheilungen (1. gemischter Chor, 2. Männergesang, 3. Schüler aus III-IV, 4. Schüler aus Quinta, 5. Schüler aus Sexta) ertheilt. 6 St. Musikdirektor Leder.

Zeichenunterricht für die Schüler der ober obern Klassen (facultativ). Kopiren von größeren ausgeführten Vorlegeblättern, Köpfen, Thieren, Landschaften, Gipsabgüssen. 2 St. Berendt.

Der Turnunterricht wurde an zwei Nachmittagen der Sommermonate ertheilt; die in 2 Coetus getheilten Schüler wurden zu Frei- und Rüst-, auch takto-gymnastischen Uebungen angeleitet. Als Turnlehrer fungirte G.-L. Dr. Zielcke, O.-L. Reddig unterstützte ihn.

Privatim lasen die Primaner beim Direktor (meist in besonderen Stunden) Cic. or. p. Marcello, Act. Verr. II, Lib. IV, Tacit. Germania, Hor. carm. III, IV, Hom. Il. II, IV, V zum Theil, bei Professor Kühnast Herod. II., 7 ff. u. III mit Auswahl; die Sekundaner bei Professor Kühnast Caesar. b. Alex., Sallust. Iugurtha und bei G.-L. Dr. Zielcke einige Bücher Odyssee.*)

Die Vorklasse, welche unter specieller Leitung des Direktors die Aufgabe hat, Schüler von den ersten Elementen zur vollen Reife für die Sexta des Gymnasiums zu führen, wurde von ihrem Ordinarius, Lehrer Böge, in folgenden Fächern unterrichtet: Religion. Ausgewählte biblische Geschichten, Erlernung des Katechismus — ohne die Lutherische Erklärung — und einiger Liederverse. 3 St. — Deutsch. Grammatik nach Bohm u. Steinert; Kenntniß sämmtlicher Wortarten, ihrer Anwendung im Satze. Die wichtigsten Regeln der Orthographie, eingeübt durch Abschreiben und Schreiben nach Diktaten. Anschauungsunterricht nach Winckelmanns Wandbildern, im Anschlusse daran kleine schriftliche Arbeiten, Leseübung, Deklamiren, mündliches und schriftliches Nacherzählen. 12 St. — Geographie. Europa. 3 St. — Rechnen. Die vier Species in unbenannten ganzen und benannten ganzen Zahlen. 4 St. — Schreiben. Nach Leßhafts Schreibheften. 2 St. — Singen. Choräle und zweistimmige Volkslieder. 2 St. — Turnen. Freiübungen und die leichtesten Rüstübungen an einem Nachmittage.



Themata zu den Ausarbeitungen waren:

I. Zu den deutschen Aufsätzen:

In Prima:

1) Worin hat die Heiterkeit der Jugend, worin die des Greisenalters ihren Grund? 2) a. Parallele zwischen dem peloponnesischen und dem 30jährigen Kriege; b. Das Leben ist der Güter höchstes nicht, der Uebel größtes aber ist die Schuld; c. Wo rohe Kräfte sinnlos walten, da kann sich kein Gebild gestalten. 3) a. Ueber Goethes Spruch: Wer Wissenschaft und Kunst besitzt, hat auch Religion; Wer diese beiden nicht besitzt, der habe Religion; b. Wie faßt Lessing in seiner Abhandlung über die Fabel das Wesen der Fabel auf? c. Parallele zwischen Caesar und Napoleon. 4) a. Durch welche Gründe werden die Menschen zur Beschäftigung mit den Wissenschaften getrieben? b. Parallele zwischen Irrenhaus und Zuchthaus; c. Freie Nacherzählung der 4. aventiure des Nibelungenliedes: wie Sivrit mit dem ꝛc.; d) Siegfried und Achilles.

---

*) Nur die obligatorische, also controlirte Privatlektüre aller Schüler ist angegeben.

5) a. Charakteristik Friedrichs d. Gr. nach dem Hymnus von Schubart; c. Inhalt von „Hermann und Dorothea"; c. Volksepos und Kunstepos. 6) a. Der Sänger. Schilderung nach Schillers: „Graf von Habsburg", Goethe's: „Der Sänger" und Uhlands: „Des Sängers Fluch"; b. Friedrichs d. Gr. Bedeutung für die deutsche Nationalliteratur; c. Wie läßt sich der Widerspruch in Tells Charakter erklären? 7) a. Welches sind die Gründe der Todesfurcht? b. Was machte die Griechen zu einem culturhistorischen Volke? 8) a. Welche Wirkung hat das Klima auf die Bildung des Menschen in Körper und Seele? b. „Der Zürchersee" von Klopstock. Metrisch, sprachlich, sachlich, in Beziehung auf Composition und innern Zusammenhang erläutert. 9) In wiefern ist der Ausspruch Schillers in seiner Abhandlung über die nothwendigen Grenzen beim Gebrauch schöner Formen begründet: Einen Jüngling in den Cirkel der Grazien einzuführen, ehe ihn die Musen als mündig entlassen haben, ist ihm nothwendig verderblich. 10) Mit welchem Rechte setzt man den Anfang der neuern Geschichte um den Beginn des 16. Jahrhunderts?

In Secunda:

1) a. Beschreibung eines Eisganges, in Terzinen; b. Beschreibung der Weichselfähre bei Kurzebrack; c. Charakteristik des Tempelherrn im „Nathan"; d. Parallele zwischen den Perser- und Freiheitskriegen. 2) a. Eine vaterländische Geschichte in der Nibelungenstrophe; b. Was lernt man aus den 3 ersten aventiuren des Nibelungenliedes für den weiteren Fortgang desselben? c. In wiefern lassen sich die Nibelungen mit der Odyssee vergleichen? d. Geschichte und Charakter des „göttlichen Sauhirten"; e. Beschreibung eines hiesigen Jahrmarkts; f. Parallele zwischen Griechenland und Italien. 3) a. Der Kampf des Iros und des Odysseus in der Nibelungenstrophe; b. Ritterleben in den Nibelungen; c. Welche geographischen Vorzüge haben Europa's Weltstellung hervorgerufen? d. Geschichte eines Thalers; e. Ubi bene, ibi patria, ubi patria, ibi bene. 4) a. Der Tod Rüdigers von Bechelaren, Beschreibung und Beurtheilung; b. Ist es ein Trost im Elend oder ein elender Trost, Leidensgenossen zu haben? 5) a. Karl XII. und Peter d. Gr.; b) Durch welche Gründe werden die Menschen zur Beschäftigung mit den Wissenschaften getrieben? 6) An's Vaterland, an's theure schließ' dich an, das halte fest mit deinem ganzen Herzen! 7) a. Phönizien und Großbrittanien, eine kulturgeschichtliche Parallele; b. Wodurch werden gute theatralische Unterhaltungen bedingt? 8) Nachweis der Schwierigkeiten, die mit dem Studium der Geschichte verbunden sind.

In Ober-Tertia:

1) a. Prosaische Darstellung der in Schillers Gedicht: „Die Kraniche des Ibykus" enthaltenen Begebenheit; b. Jeder ist seines Glückes Schmied. 2) Ueber die Schädlichkeit des Aufschiebens. 3) Wer ist in Wahrheit arm? 4) Das Weihnachtsf.st in seiner Bedeutung für Jung und Alt. 5) Lügen haben kurze Beine. 6) Wen können wir mit Recht unsern Feind nennen? 7) Die Kunst, stets zufrieden zu sein. 8) Ein Leben voll Arbeit keine Last, sondern eine Wohlthat. 9) Was verleitet die Menschen dazu, die Wahrheit nicht zu sagen? 10) Das Leben des Kriegers. 11) Der Luxus, von seiner nachtheiligen Seite betrachtet. 12) Ueber die Anwendung der Ferien.

II. Zu den lateinischen Aufsätzen:

In Prima:

1) *Μέγιστον ἀνάλωμα χρόνος.* (Chrie). a) a. Laudatio Demosthenis. b. Exponitur argumentum Oedipi Colonei. 3) a. Conferantur inter se Aiax et Ulixes — b. Pyrrhus et Hannibal. 4) a. Alexandrum venerantibus Persis Polysperchon, qui supra regem cubabat, unum ex iis mento contingentem humum per ludibrium coepit hortari, ut vehementius id quateret ad terram. b. Ut valida Divo Augusto in republica fortuna ita domi improspera fuit. 5) M. Tullius Cicero quam recte *λόγιος καὶ φιλόπατρις* ab Augusto appellatus sit (Clausurarbeit). 6) Ciceronem in provinciam Ciliciam advenientem legationis ab oppidis Ciliciensium missae princeps oratione salutat. 7) a. Ciceronis illud: in ea civitate, quae propter virtutem omnibus nationibus imperet, virtutem plurimum posse, quam recte de Romanis praedicari possit. b. Adeo in teneris consuescere multum est. 8) a. Exponitur de periculis, ex quibus Horatius deorum beneficio ereptum se esse testatur. b. Dignum laude virum Musa vetat mori. c. Oratio de M. Porcii Catonis virtutibus habita. 9) a. Tiberius in republica administranda quomodo versatus sit, ex Taciti annalium libris III et IV. exponitur. b. de Horatii amicis. c. Patriae amorem virtutem fontem esse uberrium. d. Argumentum Ciceronianae quae de signis inscribitur orationis. 10. Quibus laudibus Augustum Horatius ornaverit, exponatur (Clausurarbeit).

In Secunda:

1) a. Antiquissima respublica Romana cum Lacedaemoniorum comparatur. b. Roma urbs conditur. 2) a. Nemo ante mortem beatus (Chria). b. De bello Alexandrino. 3) a. Uter perniciosior patriae civis fuerit, Catilina Romae an Cinado Spartae? b. de Cinadonis coniuratione. 4) a. De L. Iunio Bruto libertatis Romanae vindice. b. de causa belli Iugurthini. 5). a. Ubi patria, ibi bene (Chria). b. Agesilai cum Pharnabazo colloquium. 6) a. Agesilai, Lacedaemoniorum regis, expeditio asiatica quam utilitatem attulerit Graecis. b. Describitur pugna apud Coroneam commissa. — In der Klasse geschrieben: 1) a. Quas virtutes Cicero in opprimenda coniuratione Catilinaria praestiterit. b. Narratur aliquid de coniuratione Catilinaria. 2) a. Quibus virtutibus Romulum Tullo Hostilio praestantem Livius fecerit. b. Bellum Albanum trigeminorum fratrum certamine diremptum.

Themata zu den Abiturienten-Prüfungen.

1. Ostern dieses Jahres.

a) Im Deutschen:

siehe Themata von Prima Nro. 9.

b) Im Lateinischen:

siehe Themata von Prima Nro. 5.

c) In der Mathematik:

1. Welche ganzen Zahlen entsprechen den Gleichungen

$$6(x+y)+5\sqrt{x+y+1}=63.$$
$$(x^3+y^3).(x^2+y^2)=8960?$$

2. Ein regelmäßiges Sechseck soll in ein regelmäßiges Achteck verwandelt werden. 3. Zur Berechnung eines Paralleltrapezes sind gegeben: 1) die Verbindungslinie der Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten m, 2) die Differenz der Diagonalen d, 3) der Neigungswinkel der Diagonalen, welcher der größeren Parallele gegenüber steht, α. und 4) die längere der nicht parallelen Seiten c. 4. Wie verhalten sich die in ein Tetraeder und einen Kegel, dessen Arendreieck gleichseitig ist, eingeschriebenen Kugeln, wenn Tetraeder und Kegel gleiches Volumen haben?

2. Michaelis dieses Jahres.

a) Im Deutschen:

siehe Themata von Prima Nro. 10.

c) Im Lateinischen:

siehe Themata von Prima Nro. 10.

d) In der Mathematik:

1. Aus den Gleichungen:

$$\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}=1\tfrac{3}{4}-\left(\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}\right) \text{ und}$$
$$x-y=2.$$

die Unbekannten zu bestimmen. 2. Zur Construction eines Dreiecks sind sein Umfang, eine Höhe und der Radius des eingeschriebenen Kreises gegeben. 3 Zur Berechnung eines Paralleltrapezes sind gegeben: 1. die Differenz der Parallelen a, 2. die Höhe h, 3. die Differenz der nicht parallelen Seiten d, 4. die längere Diagonale e. 4. Um und in ein Oktaeder sind Kuben beschrieben. In welchem Verhältnisse stehen ihre Volumina?

B. Aus den Verfügungen der Behörden.

Vom 11. Okt. pr. Kgl. Min. d. geistl. ꝛc. Angel. Die zur Meldung für den einjährigen Militärdienst auszustellenden Schulzeugnisse sind fortan nach einem bestimmten Schema abzufassen. — Vom 16. Dec. pr. Kgl. P.-Schul-Koll. Empfohlen wird für die Schülerbibliothek: „L. Hahn: Friedrich der Große". — Vom 23. Dec. pr. K. P.-S. übersendet den Etat des Gymnasiums für 1866/68. — Vom 23. Dec. pr. K. P.-S. empfiehlt „Schiekopp Vorträge". — Vom 26. Jan. h. K. P.-S. übersendet den Revisionsbericht. — Vom 29. Jan. K. P.-S. theilt mit, daß zu regelmäßiger Benutzung der Aula Seitens des Gesangvereins die Zustimmung nicht gegeben werden kann. — Vom 12. Febr. K. P.-S. Hinsichtlich der Sommerferien verbleibt es bei der Bestimmung vom J. 1858. — Vom 19. März. K. P.-S. Eintritt des Dr. Zschech zur commissarischen Verwaltung der vacanten vierten Lehrstelle und Abhaltung des vorschriftsmäßigen Probejahrs. — Vom 26. März. K. P.-S. genehmigt Abänderungen des Lektionsplans für das Sommerschulsemester 1866. — Vom 9. April. K. P.-S. fordert statistische Nachweisung über die Schüler nach den landräthlichen Kreisen ihrer Heimat. — Vom 2. Mai. Kgl. Regierung bewilligt 75 Thlr. zum diesjährigen „Stürmersfest". — Vom 17. Mai. K. P.-S. Für diejenigen Abiturienten, welche das militärpflichtige Alter erreicht haben, ist die Prüfung unverweilt einzuleiten. — Vom 17. Mai. K. P.-S. übersendet das Prüfungs-Reglement für die Turnlehrer an höhern Lehranstalten. — Vom 27. Mai. K. P.-S. empfiehlt „Fontane: Der schleswig-holsteinsche Krieg". — Vom 26. Juni. K, P.-S. Schüler, welche im Laufe des Quartals neu eintreten, haben alle Zahlungen für das ganze Quartal zu leisten. — Vom 5. Juli. K. P.-S. Für die nächste Direktoren-Conferenz sind geeignete Thesen vorzuschlagen. — Vom 31. Juli. K. P.-S. Der eingereichte Entwurf der Schulgesetze und der Schulordnung wird bestätigt. — Vom 17. August. K. P.-S. Anstellung des Schulamts-Candidaten F. G. Krause als fünfter ordentlicher Lehrer. — Vom 31. August. K. P.-S. übersendet Abänderungen und Zusatzbestimmungen des Regulativs für die Forstakademie zu Neustadt-Eberswalde.

C. Chronik des Gymnasiums.

1) Das Schuljahr wurde Donnerstag. den 12. Oktober pr. mit Gebet und Ansprache durch den Direktor eröffnet.

2) Am 7., 8. und 9. December unterzog der Königl. Provinzial-Schul-Rath Herr Dr. Schrader das Gymnasium einer alle Klassen umfassenden Revision, deren Ergebnisse er dem Lehrerkollegium in ebenso wohlwollender als fördernder Weise mittheilte.

3) Am 22. März d. J. feierte die Anstalt den Geburtstag Sr. Majestät des Königs. An die Eröffnungsrede des Direktors, in welcher derselbe den Ausspruch friesischer Häuptlinge bei Tacitus (Ann. XIII, 54) „an Tapferkeit und Treue übertrifft kein Sterblicher den Germanen" als die Losung und Hoffnung des preußischen Volkes in ernster Zeit hinstellte, schlossen sich die Vorträge, Reden und Gesänge der Schüler an.

4. Die erste Abiturientenprüfung wurde am 10. März d. J. unter dem Vorsitze des Prov.-Schulrathes Herrn Dr. Schrader gehalten; bei der zweiten am 16. Juni d. J. mit denjenigen Maturitätsaspiranten gehaltenen Prüfung, welche das militärpflichtige Alter erreicht hatten, fungirte der Regierungs- und Schulrath Herr Henske von hier als Königlicher Commissarius. Im ersten Termine erhielten drei, im zweiten vier Primaner das Zeugniß der Reife; über den Ausfall der noch vorzunehmenden Prüfung des Abiturienten Lippmann wird das nächste Programm berichten.

5) Am 28. Juni fand die Schulcommunion statt, an welcher sich die Lehrer des Gymnasiums mit ihren Angehörigen und der größere Theil der confirmirten Schüler betheiligten.

6) Am 4. Juli beging die Anstalt das im J. 1861 zuletzt gefeierte „Stürmersfest" auf der vom Amtsrath Stürmer dem Gymnasium vermachten Besitzung unter zahlreicher Theilnahme des

Publikums und unter dem frischen Eindrucke der eben eingetroffenen Siegesnachricht. Es gereicht dem Unterzeichneten zu besonderer Genugthuung, hier dankend erwähnen zu können, daß die Gymnasiasten im Anschluß an das Fest eine Sammlung zum Besten der verwundeten Krieger veranstalteten, zu deren Ertrag von 53 Thlr. 16 Sgr. 6 Pf. die oberen Klassen noch 37 Thlr. 13 Sgr. 6 Pf. aus dem Erlös zweier im Laufe des Winters von ihnen veranstalteten musikalischen Abendunterhaltungen hinzufügten. Die ganze Summe mit 91 Thlr. ist dem Centralcomité zu Berlin laut dessen Quittung vom 22. Juli zur Verfügung gestellt worden.

7) Die Ferien sind nach den gesetzlichen Bestimmungen gehalten worden: eine Ferienbeschäftigung fand wegen der zu geringen Theilnahme nicht statt.

D. Statistische Verhältnisse.

I. Die Lehrer der Anstalt.

Auch im verflossenen Schuljahre wurde die Anstalt von manchem Wechsel in dem Bestande des Lehrer-Kollegiums betroffen. Zu Ostern des Jahres schied der vierte ordentliche Lehrer Dr. Delbrück aus, um zur akademischen Lehrthätigkeit überzugehen, nachdem er in der kurzen Zeit seiner hiesigen Wirksamkeit sich die Werthschätzung seiner Amtsgenossen und die Zuneigung seiner Schüler in hohem Maße erworben hatte. Zur Verwaltung seiner Stelle wurde der Schulamts-Candidat Dr. Zschech, bis dahin an der höheren Bürgerschule zu Fürstenwalde beschäftigt, berufen. Im Sommer verließ uns der Schulamts-Candidat Dr. Rudloff, welcher seit Mai 1865 die fünfte Lehrstelle commissarisch verwaltet hatte, um seiner Militärpflicht in der Kgl. Armee zu genügen. Für ihn konnte ein Ersatz nicht gefunden werden, und es wurden demnach seine Lehrstunden von Mitgliedern des Kollegiums übernommen. Inzwischen ist der Schulamts-Candidat F. G. Krause, bisher am Gymnasium zu Gumbinnen, als fünfter ordentlicher Lehrer ernannt und wird mit dem Beginn des neuen Schuljahres sein hiesiges Amt antreten.

Den gegenwärtigen Bestand des Kollegiums und die Vertheilung des Unterrichts ergiebt die Tabelle S. 10.

2. Die Schüler.

Gegenwärtig (1. September) zählt die Anstalt 245 Schüler. Neu aufgenommen wurden im Laufe des Schuljahres 57, es gingen ab 25 Schüler (darunter 7 mit dem Zeugnisse der Reife, 2 durch den Tod, 9 zu anderem Berufe, 7 auf andere Anstalten). Einem Schüler mußte der Rath ertheilt werden, die Anstalt zu verlassen. Unter den Schülern sind 220 Evangelische, 3 Katholiken, 22 Israeliten, 154 Einheimische, 91 von auswärts.

Die Vorklasse zählt 41 Schüler, von denen 34 evangelischen, 1 katholischen, 6 mosaischen Bekenntnisses sind.

Zu beklagen hatten wir den Tod zweier Gymnasiasten und eines Schülers der Vorklasse. Der Quintaner Karl Gützlaff erlag einem langwierigen Gehirnleiden am 12. November d. J., der Unter-Tertianer Felix Kanter starb am 2. Juni 1866 am Nervenfieber. Lehrer und Schüler gaben beiden das letzte Geleit. Der Schüler der Vorklasse Dietrich von der Reck wurde durch ein Gehirnleiden am 19. April d. J. dahingerafft.

Vertheilung des Unterrichts auf Klassen und Lehrer.

Lehrer.	Ordinariat	I.	II.	IIIa.	IIIb.	IV.	V.	VI.	Wöchentlich Stunden
Dr. Breiter Direktor.		2 Religion 8 Latein 2 Gr.	2 Religion						14
Prof. Dr. Gützlaff erster Oberlehrer	I.	4 Mathematik	4 Mathematik 1 Physik	3 Mathem.	3 Mathem.	3 Mathem.			18
Prof. Dr. Kühnast zweiter Oberlehrer	II.	4 Griechisch	8 Latein 4 Griechisch				3 Religion		19
Reddig dritter Oberlehrer	III. a.	3 Geschichte	3 Geschichte 2 Vergil	6 Griechisch 2 Deutsch 4 Geschichte					20
Dr. Zeyß vierter Oberlehrer		2 Hebräisch	2 Hebräisch		10 Latein			3 Religion 2 Geographie	19
Gräser erster Gymn.-Lehrer	V.	2 Franz. 2 Englisch (I.–IIIa.)	2 Franz.	3 Franz.	2 Franz.	2 Franz.	3 Franz. 2 Geogr.		18
Dr. Künzer zweit. Gymn.-Lehrer	III. b.	3 Deutsch 2 Physik		2 Religion	2 Religion 2 Naturgesch.	2 Religion	3 Rechnen 2 Mathematik	4 Rechnen 2 Naturgesch.	24
Dr. Zielcke dritt. Gymn.-Lehrer	IV.		2 Deutsch 2 Homer	2 Ovid		10 Latein 6 Griechisch 2 Deutsch			24
Dr. Zschech comm. Hülfslehrer	VI.			8 Latein	3 Geschichte			12 Lat. u. Dtsch.	23
Dr. Rudloff comm. Hülfslehrer	—				6 Griech. 2 Deutsch	3 Geschichte u. Geogr.	3 Deutsch 9 Latein		23
Berendt Zeichenlehrer	—	2 Zeichnen (I.–IIIb.)				2 Zeichnen	2 Zeichnen 3 Schreiben	2 Zeichnen 3 Schreiben	14
Musikdir. Leder Gesanglehrer	—	2 Chorgesang (I.–IV.) 1 Männerchor (I.–II.)			1 Gesang (IIIb.–IV.)		1 Gesang	1 Gesang	6

Das Resultat der am 10. März und 16. Juni gehaltenen Abiturientenprüfung ist folgendes:

Lauf. Nro.	Name.	Geboren am	Geburtsort.	Confession.	Stand des Vaters.	Jahre a. d. Schule	Jahre in Prima	Prädikat.	Gewählter Beruf.
	a. am 10. März.								
1	Hugo Mayer	11. Juni 1846	Deutsch Eylau	ev.	Kreisger.-Rath hier	11½	2½	Reif	Jura
2	Paul Genée	27. März 46	Stepenitz	ev.	Forstmeister hier	1½	2½	Reif	Forstfach
3	Georg Fischer.	28. Mai 46	Danzig	ev.	Superintendent in Bordzichow	1	2	Reif	Militär
	b. am 16. Juni.								
1	Hans Schaffrinski	6. Dec. 1846	Potsdam	ev.	Ob.-Regier.-Rth.	1¼	2¼	Reif	Forstfach
2	Alfred Hencke	28. März 46	Kl. Schönbrück	ev.	Rittergutsbesitzer in Kl. Schönbrück	9	2	Reif	Landwrthsch.
3	Anton Heidenhain	26. Dec. 45	Marienwerder	ev.	Sanitätsrath hier	10	2	Reif	Jura
4	Bruno Gräser	28. Febr. 45	Marienwerder	ev.	Gymnasiallehrer hier	10½	2	Reif	Philologie.

3. Lehrbücher.

Gegenstand.	Bezeichnung.	Für die Klassen
Religion . . .	Bibel, Gesangbuch, Katechismus	I — VI.
	Henske, Lehrbuch rc.	I — II.
Deutsch . . .	Lehmann Lesebuch I.	IV — VI.
Latein	Ferd. Schultz kl. lat. Sprachlehre	IIIa — VI.
	Zumpt Grammatik	I — II.
	Spieß lat. Uebungsbuch	VI. V.
	Süpfle Aufgaben Thl. I.	IIIb.
	— " " II.	II.
	Gruber Uebungsbuch	IIIa.
Griechisch . . .	Spieß, griechische Formenlehre } — griechisches Uebungsbuch }	IIIa — IV.
	Buttmann, Grammatik	I — II.
	Franke Aufgaben Cursus III.	II.
Französisch . .	Plötz, Elementarbuch	IV — V.
	— Grammatik	I — III.
Englisch . . .	Gräser, prakt. Lehrgang }	I — II.
Hebräisch . . .	Gesenius, Grammatik }	
Geschichte . . .	Cauers Tabellen	IIIa — IV.
	Dietsch, Grundriß	I — II.
	Voigt, geographischer Leitfaden	I — VI.
Naturkunde . .	Schillings Naturgeschichte	IIIb. V — VI.
Schreiben . . .	Herzsprungs Schreibhefte	VI.

4. Lehrmittel.

a Zustand derselben.

Die Lehrerbibliothek zählt jetzt 9136 Bände und ist um c. 100 Bände gewachsen.

Die Schülerbibliothek ist um 200 Bände vermehrt. Der Bestand derselben bedarf einer Sichtung und Ausscheidung manches unbrauchbaren; es bleibt daher die genauere Angabe dem nächsten Programm vorbehalten.

Die Naturaliensammlung enthält für Mineralogie 77, für Zoologie 218, für Botanik 20, an Kunstprodukten 42, an Instrumenten 20 Nummern.

Das physikalische Kabinet zählt 158 Nummern. Neu angeschafft sind: ein Rotationsapparat nebst Zubehör, eine Messingkugel zu Pendelversuchen; einzelne Apparate wurden reparirt.

Die Vorbildersammlung enthält 112 Rubriken.

Die Sammlung von Musikalien besteht in 169 Pièçen.

b. Geschenke.

1) Von dem Königlichen Ministerium der geistlichen Angelegenheiten: 1. Zeitschrift für allgemeine Erdkunde. Herausgegeben von Prof. Dr. W. Koner. Jahrgang 1866. — 2. Zeitschrift für Preußische Geschichte und Landeskunde von Prof. Dr. Foß, Jahrgang 1866. — 3. Gerhard, Etruskische Spiegel. Lief. 15—17. — 4. Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 65. — 5. Haupt Zeitschrift für deutsches Alterthum Bd. XIII, Heft 1 u. 2. — 6. Pertz Monumenta Germ hist. Bd. XIX. — 7. Josephi Scaligeri poemata omnia. Ed. II. Berol. 1864. — 8. Bouterwek, Geschichte der lateinischen Schule zu Elberfeld. — 9. Rheinisches Museum für Philologie. Jahrgang 1865.
2) Von der löblichen Bon'schen Buchhandlung zu Königsberg: Müttrich, stereometrische Aufgaben.
3) Von dem Justizrath Herrn John hierselbst: 33 Werke für die Schülerbibliothek.
4) Vom hiesigen, seit nunmehr 30 Jahren bestehenden historischen Lesecirkel erhielten wir durch den Gründer desselben, Herrn Professor Dr. Schröder, pro 1866 30 Werke in 46 Bänden im Ankaufspreise von 83 Thlr. 11 Sgr.
5) Von Herrn Professor Dr. Schröder: Bork, Evangelisches Jahrbuch von Posen. 5. u. 6. Jahrgang.
6) Ueberdies erhielten wir Geschenke für das Naturalienkabinet von Herrn Forstinspektor Freihern v. d. Reck und Herrn Regierungsassessor Korn; von dem Sextaner Oehler eine langohrige Fledermaus; für die Schülerbibliothek von den Abiturienten Mayer, Marquardt.

5. Unterstützungen für Schüler.

1) Die Zinsen des Prämienfonds und eines Stürmerschen Legates, zusammen 47 Thlr. 10 Sgr. 6 Pf., werden auch in diesem Jahre an würdige Schüler zur Vertheilung kommen, und sind die betreffenden Vorschläge dem Königl. Provinzial-Schul-Kollegium überreicht.
2) Schulbücher sind im Belauf von 757 Nr. an Schüler aus allen Klassen dargeliehen.
3) Etwa 15 Procent des gesammten Schulgeldes sind erlassen. Weitere Befreiungen von dieser Zahlung können jedoch nur in besonders geeigneten Fällen eintreten, da gesetzlich höchstens 10 Procent der Gesammtzahl Freischüler sein dürfen.

D. Sonstiges.

1) Jeder Schüler, dessen Eltern sich nicht am hiesigen Orte befinden, muß in eine passende Pension aufgenommen sein. Nur mit Genehmigung des Direktors kann eine solche Pensionsaufnahme geschehen; geschieht sie gegen dessen Billigung, so ist es Pflicht des Direktors, dem betreffenden Schüler den Besuch des Gymnasiums nicht zu gestatten.

2) Zur Beseitigung der Uebelstände, welche insbesondere für die Schüler der untern Klassen in der langen Dauer der Sommerferien liegen, ist die Einrichtung sehr heilsam, daß solche Schüler, sofern ihre Eltern es wünschen, täglich einige Stunden während der Ferien im Schullokale zubringen und daselbst von einem oder mehreren Lehrern bei ihren Ferienarbeiten beaufsichtigt oder anderweitig beschäftigt werden, wofür die betreffenden Schüler eine angemessene Vergütigung zu zahlen haben. — Auf das rechtzeitige Eintreffen der Schüler nach den Ferien ist mit Strenge zu halten. —

3) Es ist den Gymnasiasten gesetzlich aufs strengste verboten, Wirths- und Gasthäuser, Billards, Konditoreien, u. s. w. ohne ihre Eltern zu besuchen. — Die Erfahrung lehrt, daß Ermahnungen von Seiten der Schule allein nicht im Stande sind, dem gesetzwidrigen Besuche der Art zu steuern, wenn nicht die Eltern und deren Stellvertreter auf alle Weise für die Aufrechthaltung dieses allgemeinen Gesetzes mitwirken. Die Ortspolizeibehörde hat es übernommen, durch Revision und Kontrolle auf jede Weise kräftig einzuschreiten, und die hiesige Königl. Regierung hat auch ihrerseits zur Aufrechthaltung des Gesetzes die geeigneten Maßregeln ergriffen. (Vergl. Amtsblatts-Verfügung 1831 S. 176 und 1833 S. 180, so wie April 1845 S. 153 und vom 22. Mai 1851).

4) Kein Schüler darf ohne Erlaubniß von Seiten der Schule die Lehrstunden, die Prüfungen, die Censuren ꝛc. versäumen, mit Ausnahme von Krankheits- und sonstigen sehr dringenden Fällen. Auch die Abiturienten haben bis zu ihrer Entlassung alle Lehrstunden mit derselben Pünklichkeit, wie die andern Schüler, zu besuchen.

Jeder Schüler hat, wenn er um Urlaub für einen halben Tag oder für längere Zeit bitten will, ein schriftliches Urlaubsgesuch seines Vaters oder Pensionsvaters und zwar zuerst dem Ordinarius vorzuweisen. Im Interesse der Schüler selbst bitten wir die geehrten Eltern, nur in wirklich dringenden Fällen ihre Kinder dem Unterrichte entziehen zu wollen.

5) Was die zum einjährigen Militärdienst sich meldenden Freiwilligen betrifft, so können die Schüler aus den 2 ersten Klassen, (gleichviel, ob diese Klassen in Abtheilungen zerfallen), die Sekundaner jedoch nur, wenn sie mindestens ½ Jahr in Sekunda gesessen und am Unterricht in allen Lehrgegenständen theilgenommen haben, durch Atteste hierüber den Nachweis der wissenschaftlichen Qualifikation zu diesem Dienst führen.

Die Meldung zu dem Dienst geschieht frühestens im Laufe desjenigen Monats, in welchem das 17. Jahr zurückgelegt wird, und spätestens bis 1. Februar desjenigen Kalenderjahrs, in welchem das 20. Lebensjahr vollendet wird. Wer diese Termine versäumt, verliert den Anspruch auf einjährigen Dienst. Der Dienstantritt kann bis 1. Oktober desjenigen Kalenderjahrs ausgesetzt werden, in welchem das 23. Lebensjahr vollendet wird. Die persönliche Gestellung vor die Departementsprüfungskommission ist bedingungsweise erlassen.

6) Soll ein Schüler das Gymnasium verlassen, so muß solches von den Eltern oder deren Stellvertretern dem Direktor persönlich oder schriftlich angezeigt werden. Geschieht die ordnungsmäßige Abmeldung eines Schülers nicht vor dem ersten Tage des neuen Quartals, so muß das Schulgeld für das Quartal entrichtet werden. Der Abgehende ist so lange noch Schüler und als solcher zu allen Zahlungen des Schulgeldes ꝛc. verpflichtet, bis er sein Abgangszeugniß erhält.

7) Nach den Verfügungen des Königl. Provinzial-Schulkollegiums zu Königsberg v. 24. März und 14. Mai 1857 ist Folgendes festgesetzt.

Um den regelmäßigen Eingang der Hebungen von den Schülern zu sichern, soll die Gymnasial-Kasse jeden Rückstand, welcher 14 Tage nach dem Fälligkeitstermine nicht zur Kasse ge-

zahlt ist, gleich nach Ablauf der 14 Tage dem Direktor anzeigen, und dieser sodann ohne Weiteres die Requisitionen an die zuständigen Ortspolizei-Behörden wegen exekutivischer Beitreibung der Reste erlassen und jede einzelne Angelegenheit bis zu ihrer vollständigen Beendigung verfolgen. Nur besonders begründete Ausnahmen können stattfinden.

Die

Schlußfeier und Entlassung der Abiturienten

beginnt Dienstag, den 25. September, früh 9 Uhr.

Am 28. September ist die Censur und der Schluß des Schuljahres. Die Herbstferien dauern vom 29. September bis einschließlich Mittwoch, den 10. Oktober. Donnerstag, den 11. Oktober beginnt das neue Schuljahr.

Zur Aufnahme neuer Schüler wird der Unterzeichnete am 10. Oktober im Gymnasium bereit sein.

Marienwerder, Mitte September 1866.

Breiter.

